



Tentamen Inleiding Grafentheorie 17-8-2004

In dit tentamen gebruiken wij tenzij anders gemeld uitsluitend grafen zonder lussen of parallelle lijnen, met dien verstande, dat in een gerichte graaf antiparallelle lijnen zijn toegestaan. Bovendien gebruiken we uitsluitend verbindings matrices met nullen op de hoofd diagonaal.

1 *Reguliere tweedelingsgrafen.*

- a) Wat betekent het als twee grafen **isomorf** zijn? Geef de definitie. Wat betekent het als een graaf **regulier** van graad d is? Geef de definitie. Geef ook de definitie van een **tweedelingsgraaf** (*bipartite graaf*).
- b) Geef een *duidelijke gestructureerde* tekening van alle **samenhangende onderling niet isomorfe reguliere tweedelingsgrafen** op 8 punten.
- c) Geef de **verbindings matix** van elk van de in het vorige onderdeel gevonden **samenhangende onderling niet isomorfe reguliere tweedelingsgrafen**. (Zorg dat de labels van de punten systematisch gekozen worden).

2 *Het teleprinter probleem, de De Bruijn rijen en de Gray codes.*

Het is de bedoeling om alle strings ter lengte 3 over het alfabet $\{0,1\}$ in een cirkeltje te genereren, en wel zo, dat elke string in dat cirkeltje precies één keer voor komt. (In dit vraagstuk zijn lussen en dubbele lijnen in de grafen toegestaan.)

- a) Als je met behulp van een Euler ronde zo'n cirkelstring wil genereren, hoe moet je dan de punten van de graaf nummeren, en hoe moet je de lijnen nummeren?
- b) Geef een tekening van de graaf waarmee je dit teleprinter probleem kunt oplossen.
- c) Maak een cirkelvormige string die een oplossing is voor dit teleprinter probleem.
- d) Geef aan aan welke eisen een rij van strings moet voldoen om een **Gray code** te zijn. Geef ook een **Gray code** van strings ter lengte 4 over $\{0,1\}$.

3 Een algorithmme voor het handelsreizigers probleem.

- a) Geef de definitie van het *handelsreizigers probleem*. Aan welke eisen moet een *afstanden matrix* voldoen? Wat bedoelt men in dat verband met de *driehoeks ongelijkheid*? Is de onderstaande matrix een echte afstanden matrix? Licht dit toe. Pas de matrix indien nodig aan om er een echte *afstanden matrix* van te maken.
- b) In het dictaat staat een benaderend algorithmme van het handelsreizigers probleem. Geef dit algorithmme.
- c) Ga uit van de rechts gegeven matrix en van de cykel A B C D E A. Ga door een aantal malen het algorithmme uit b) toe te passen zoeken naar verkorting van de cykel. Geef de uiteindelijke cykel die niet meer wordt verbeterd, en de totale afstand van deze cykel.

	A	B	C	D	E
A	0	13	9	7	11
B	13	0	15	5	18
C	9	15	0	16	3
D	7	5	16	0	17
E	11	18	4	17	0

4 Bomen en tellingen van lijnen, punten en componenten.

- a) Wanneer heet een graaf een *boom*? Geef de definitie.
- b) Als in een samenhangende graaf elke lijn een *brug* is, dan is deze graaf een boom. Bewijs dit.
- c) Gegeven een graaf zonder circuits. Hoe kan men dan het aantal componenten afleiden uit het aantal punten V en het aantal lijnen E ? Bewijs uw antwoord.

NORMERING

1a 2 pt	2a 3 pt	2d 3 pt	3c 3 pt	4c 4 pt
1b 4 pt	2b 2 pt	3a 2 pt	4a 1 pt	Multiple Choice:
1c 2 pt	2c 2 pt	3b 4 pt	4b 4 pt	1 punt per vraag

$$CIJFER = \frac{SOM}{5} + 1.$$

Naam:

Studierichting en jaar:

17-8-2004

Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.

In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag precies één alternatief juist én volledig.

- 5 Welke van onderstaande typen grafen is altijd vlak:
- ☐ bomen.
 - ☐ reguliere grafen.
 - ☐ Euler grafen.
 - ☐ Hamilton grafen.
 - ☐ grafen die isomorf zijn met $K_{3,4}$.
 - ☐ grafen die isomorf zijn met de Petersen graaf.
 - ☐ geen van deze.
- 6 Een netwerk is
- ☐ een gerichte gewogen graaf (de gewichten stellen de capaciteit voor).
 - ☐ een gerichte graaf waarin aan elke pijl een positief getal (de capaciteit) is toegekend.
 - ☐ een gerichte graaf waarin aan elke pijl een niet-negatief getal (de stroom) is toegekend.
 - ☐ een gerichte graaf met een bron en put waartussen een stroom loopt.
 - ☐ een samenhangende graaf waarin aan elke lijn een positief getal (de capaciteit) is toegekend.
 - ☐ een gewogen graaf (de gewichten stellen de capaciteit voor).
- 7 De stelling van Ford & Fulkerson stelt dat in een netwerk met bron en put
- ☐ een maximumstroom in geen enkele pijl de opgegeven capaciteit overtreft.
 - ☐ de stroomsterkte van een maximumstroom gelijk is aan de minimum capaciteit van een pijl.
 - ☐ bij iedere stroom een onverzadigd (ongericht) pad van bron naar put bestaat.
 - ☐ bij een maximumstroom, de stroom door een pijl gelijk is aan de capaciteit van die pijl.
 - ☐ de stroomsterkte van een maximumstroom gelijk is aan de minimum capaciteit van een snede.
- 8 Een graaf $G=(V,E)$ is een Hamilton graaf als
- ☐ G een cykel bevat die elke lijn van E één keer aandoet.
 - ☐ G een wandeling bevat die elk punt van V één keer aandoet.
 - ☐ G een wandeling bevat die elke lijn van E één keer aandoet.
 - ☐ G een opspannende cykel bevat.
 - ☐ G samenhangend is en geen bruggen bevat.

Z.O.Z.

- 9 Zij $G=(V,E)$ een graaf. Een Euler ronde in G is gedefinieerd als
- ☐ een gesloten wandeling die elke lijn van E precies één keer aandoet.
 - ☐ een wandeling die elke lijn van E precies één keer aandoet.
 - ☐ een gesloten wandeling die elk punt van V precies één keer aandoet.
 - ☐ een cykel die een vlak begrensd in een vlakke voorstelling van G .
 - ☐ een cykel die door alle punten van V gaat.
- 10 Een toernooi is gedefinieerd als een gerichte graaf waar
- ☐ aan elke pijl een gewicht is toegekend (de "score").
 - ☐ tussen elk tweetal punten in beide richtingen één pijl voorkomt.
 - ☐ tussen elk tweetal punten precies één pijl voorkomt.
 - ☐ een gerichte Hamilton cykel mogelijk is.
 - ☐ tussen elk tweetal punten een ongericht pad bestaat.
- 11 Een opspannende boom in een samenhangende graaf $G=(V,E)$ is
- ☐ een samenhangende deelgraaf van G zonder cycli.
 - ☐ een deelgraaf die een boom is, en bij weglaten G onsaamenhangend maakt.
 - ☐ een minimale, samenhangende, opspannende deelgraaf.
 - ☐ een maximale, samenhangende, opspannende deelgraaf.
 - ☐ een boom met dezelfde vertices als G .
- 12 De stelling van Berge-Petersen zegt:
- ☐ Een koppeling F is maximaal precies dan als er geen vergrotend F -wisselpad bestaat.
 - ☐ Een koppeling F is maximum precies dan als er geen vergrotend F -wisselpad bestaat.
 - ☐ Een koppeling F is volledig precies dan als F alle punten verzadigt.
 - ☐ Elke twee koppelingen F, F' met $|F| < |F'|$ kunnen in balans worden gebracht door uitwisselen van lijnen.
- 13 Zij $G=(V_1, V_2, E)$ een tweedelingsgraaf en W een deelverzameling van V_1 . Een toewijzing van W in V_2 is
- ☐ een volledige koppeling in de opspannende deelgraaf op de punten van W en V_2 .
 - ☐ een toekenning van ten hoogste $|W|$ punten uit V_2 aan W .
 - ☐ een koppeling tussen de punten van W en V_2 die alle punten van W verzadigt.
 - ☐ een verzameling extra lijnen van punten uit W naar V_2 .
 - ☐ een verzameling B van burens van W zo dat $|B| \geq |W|$.