



## Tentamen Inleiding Grafentheorie 19-8-2003

*In dit tentamen gebruiken wij tenzij anders gemeld uitsluitend grafen zonder lussen of parallelle lijnen, met dien verstande, dat in een gerichte graaf antiparallelle lijnen zijn toegestaan. Bovendien gebruiken we uitsluitend verbindings matrices met nullen op de hoofd diagonaal.*

### 1 *Graden van punten in gerichte en ongerichte grafen.*

- a) In een ongerichte graaf met ten minste twee punten zonder lussen of dubbele lijnen komen twee verschillende punten voor van gelijke graad. Bewijs dit.
- b) In een gerichte graaf is het mogelijk, dat alle graden verschillend zijn. Geef een voorbeeld.
- c) In een gerichte graaf is het mogelijk, dat alle ingraden van de punten verschillend zijn, en tevens ook alle uitgraden van de punten verschillend zijn. Geef een voorbeeld.
- d) Als in een gerichte graaf de ingraden van alle punten verschillend zijn, dan kan het aantal lijnen van de graaf worden uitgedrukt in het aantal punten. Geef de formule met een korte toelichting.

### 2 *Gray codes en Hamilton cykels op kubus grafen.*

In deze opgave bekijken we steeds strings van vaste lengte over het alfabet  $\{0,1\}$ . Deze strings worden gezien als de punten van een (*hyper*)*kubusgraaf*. Een tweetal punten in deze kubusgrafen is verbonden dan en alleen dan als de bijbehorende strings op precies één plaats verschillen.

- a) Er bestaat een Hamilton cykel in de kubus graaf op de strings ter lengte **3** over  $\{0,1\}$ . Geef zo'n Hamilton cykel aan.
- b) Uitgaande van deze kubusgraaf kunnen wij ook op de hyperkubusgraaf met als punten alle strings ter lengte **4** ook een Hamilton circuit construeren. Geef dit circuit en beschrijf de constructie.
- c) Voor ieder natuurlijk getal  $n \geq 2$  bestaat er op de op de hyperkubusgraaf, waarvan de punten genummerd zijn met strings ter lengte  $n$  een Hamilton cykel. Toon dit aan.

### 3 *Bomen en grafen zonder circuits.*

- a) Wanneer heet een graaf een *boom*? Geef de definitie.
- b) Als in een graaf tussen elke twee punten *precies* één pad bestaat, dan bevat deze graaf geen circuits. Bewijs dit.
- c) Als in een samenhangende graaf elke lijn een *brug* is, dan is deze graaf een boom. Bewijs dit.

### \* 4 *Vergrotende wisselpaden en maximum koppelingen.*

- a) Geef de definitie van een  $F$  – vergrotend wisselpad in een graaf  $G$  met koppeling  $F$ .
- b) Geef de stelling van Berge over maximumkoppelingen en  $F$  – vergrotende wisselketens.
- c) Neem de tweedelingsgraaf  $G$  met  $V_1 = \{1, \dots, 6\}$  en  $V_2 = \{a, \dots, f\}$  en met de hiernaast gegeven verbindingsmatrix. Gebruik de “Hongaarse methode” om, uitgaande van de volgende koppeling  $F$ , een maximum koppeling in  $G$  te vinden:  $F = \{1-a, 4-b, 5-c\}$ .
- d) De gevonden maximum koppeling in c) is niet volledig. Volgens een bekende stelling dient er dus een deelverzameling  $W$  van  $V_1$  te zijn, zo dat  $|B(W)| < |W|$ . Geef zo’n verzameling  $W$ , uitgaande van de berekeningen in onderdeel c).

| – | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 1   | 0   | 0   | 0   | 1   | 0   |
| 2 | 1   | 0   | 0   | 0   | 0   | 1   |
| 3 | 1   | 0   | 0   | 0   | 1   | 0   |
| 4 | 0   | 1   | 1   | 0   | 0   | 0   |
| 5 | 0   | 1   | 1   | 1   | 0   | 0   |
| 6 | 1   | 0   | 0   | 0   | 1   | 0   |

### NORMERING

Elke goed beantwoorde multiple choice vraag geeft 1 punt. Voor de overige vragen gelden de volgende puntenaantallen :

|         |         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1a 3 pt | 1d 3 pt | 2c 3 pt | 3c 4 pt | 4c 2 pt |
| 1b 2 pt | 2a 2 pt | 3a 1 pt | 4a 2 pt | 4d 3 pt |
| 1c 2 pt | 2b 3 pt | 3b 4 pt | 4b 2 pt |         |

$$CIJFER = \frac{SOM}{5} + 1.$$

Naam:

Studierichting en jaar:

19-8-2003

**Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.**

**In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag precies één alternatief juist én volledig.**

- 5 Een graaf  $G=(V,E)$  is een tweedelingsgraaf (bipartiete graaf) als
- ☐  $G$  precies twee componenten heeft.
  - ☐  $G$  het komplement is van een samenhangende graaf.
  - ☐  $E$  bestaat uit twee disjunkte deelverzamelingen  $E_1, E_2$ , zo dat een lijn uit  $E_1$  en uit  $E_2$  nooit een uiteinde gemeen hebben.
  - ☐  $G$  geen oneven cykels bevat.
  - ☐  $G$  geen even cykels bevat.
- 6 Een toernooi is gedefinieerd als een gerichte graaf waar
- ☐ tussen elk tweetal punten een ongericht pad bestaat.
  - ☐ tussen elk tweetal punten een gericht pad bestaat.
  - ☐ tussen elk tweetal punten precies één pijl voorkomt.
  - ☐ tussen elk tweetal punten ten hoogste één pijl voorkomt.
  - ☐ aan elke pijl een gewicht is toegekend (de "score").
- 7 Een  $k$ -reguliere graaf is
- ☐ een gewogen graaf waarbij elke lijn het gewicht  $k$  krijgt.
  - ☐ een volledige graaf met  $k$  elementen.
  - ☐ een graaf waarin elk punt van graad  $k$  is.
  - ☐ een gerichte graaf waarin elk punt in- en uitgraad  $k$  heeft.
  - ☐ een graaf met  $k$  even grote componenten.
- 8 Het Handelsreizigersprobleem is het probleem om in een gewogen graaf
- ☐ een volledige toewijzing te vinden van minimaal gewicht.
  - ☐ een Hamilton-cykel te vinden van minimaal gewicht.
  - ☐ een Euler toer te vinden van minimaal gewicht.
  - ☐ een rondwandeling te vinden van minimaal gewicht.
  - ☐ een pad van minimaal gewicht te vinden tussen twee punten.

**Z.O.Z.**

- 9 Een opspannende boom in een samenhangende graaf  $G=(V,E)$  is
- ☐ een samenhangende deelgraaf van  $G$  zonder cycli.
  - ☐ een boom met dezelfde vertices als  $G$ .
  - ☐ een deelgraaf die een boom is, en bij weglaten  $G$  onsaamenhangend maakt.
  - ☐ een maximale, samenhangende, opspannende deelgraaf.
  - ☐ een minimale, samenhangende, opspannende deelgraaf.
- 10 Met de Dijkstra algoritme construeert men
- ☐ een maximale stroom in een netwerk.
  - ☐ een minimale toewijzing in een gewogen graaf.
  - ☐ een minimale rondwandeling in een afstandsgraaf.
  - ☐ een minimale padenboom in een gewogen graaf.
- 11 De stelling van Ford & Fulkerson stelt dat in een netwerk met bron en put
- ☐ bij een maximumstroom er door elke snede tussen bron en put evenveel stroom gaat.
  - ☐ de stroomsterkte van een maximumstroom gelijk is aan de minimum capaciteit van een snede.
  - ☐ bij een maximumstroom, de stroom door een pijl gelijk is aan de capaciteit van die pijl.
  - ☐ bij een maximumstroom, de instroom van elk punt (behalve bron en put) gelijk is aan de uitstroom van dat punt.
  - ☐ bij iedere stroom een onverzadigd (ongericht) pad van bron naar put bestaat.
- 12 Een koppeling in een graaf  $G=(V,E)$  is gedefinieerd als
- ☐ een verzameling  $F$  van extra lijnen zo dat alle componenten van  $G$  onderling verbonden worden ("gekoppeld") door lijnen uit  $F$ .
  - ☐ een deelverzameling  $F$  van lijnen in  $E$  zo dat geen vergrotend  $F$ -wisselpad bestaat in  $G$ .
  - ☐ een deelverzameling  $F$  van lijnen in  $E$  zodat geen twee lijnen uit  $F$  een uiteinde gemeen hebben.
  - ☐ een maximale samenhangende deelgraaf van  $G$ .
- 13 De stelling van Hall over toewijzingen in een tweedelingsgraaf  $G=(V_1,V_2,E)$  zegt dat een toewijzing van  $V_1$  in  $V_2$  bestaat enkel en alleen als
- ☐  $G$  regulier is (d.w.z., de graad is in elk punt dezelfde).
  - ☐  $|B(W)| \geq |W|$  voor elke deelverzameling  $W$  van  $V_1$ .
  - ☐  $|B(W)| < |W|$  voor elke deelverzameling  $W$  van  $V_1$ .
  - ☐  $|B(W)| \geq |W|$  voor elke deelverzameling  $W$  van  $V_2$ .
  - ☐  $|B(W)| < |W|$  voor elke deelverzameling  $W$  van  $V_2$ .
  - ☐ de graad van elk punt uit  $V_1$  tenminste  $|V_2|/2$  is .