

Tentamen Inleiding Grafentheorie 14-8-2002

In dit tentamen gebruiken wij tenzij anders gemeld uitsluitend grafen zonder lussen of parallelle lijnen, met dien verstande, dat in een gerichte graaf antiparallelle lijnen zijn toegestaan. Bovendien gebruiken we uitsluitend verbindings matrices met nullen op de hoofd diagonaal.

1 *Het teleprinter probleem of de De Bruijn rijen.*

Het is de bedoeling om een kringvormige string te genereren over het alfabet $\{0, 1, 2\}$ waarin elke string ter lengte 3 precies één keer voor komt als deelstring.

- a) Als je met behulp van een Euler ronde zo'n kring wil genereren, hoe moet je dan de punten van de graaf nummeren, en hoe moet je de lijnen nummeren? Hoeveel punten heeft die graaf, hoeveel lijnen? En hoeveel symbolen zitten er in de kring?
- b) Geef een tekening van de graaf waarmee je dit teleprinter probleem kunt oplossen. (Graag vrij groot, en zet nummers bij punten en lijnen, zodat de oplossing te controleren is.)

2 *Een algorithmen voor het handelsreizigers probleem.*

- a) Welke drie eigenschappen definiëren een *metriek*? Wat bedoelt U in dat verband met de *driehoeks ongelijkheid*? Aan welke eisen moet een *afstandenmatrix* voldoen?
- b) Geef de definitie van het *handelsreizigers probleem*.

- c) In het dictaat staat een benaderend algoritme van het handelsreizigers probleem. Geef dit algoritme.

- d) Rechts is gegeven een gewichtsmatrix van de volledige graaf K_5 . Pas eerst de matrix aan tot het een echte afstandenmatrix is, en teken de bijbehorende afstandsgraaf met getallen bij de lijnen. Ga uit van de afstandenmatrix en van de

	A	B	C	D	E
A	0	7	6	8	10
B	7	0	9	6	5
C	6	9	0	5	9
D	8	6	5	0	3
E	10	5	9	3	0

cykel A B C D E A. Ga daarna met het algoritme uit c) zoeken naar een verbetering van de cykel. Wat vind U als gewicht van de beste cykel die zo via enkele stappen van het algoritme bereikt wordt?

Z.O.Z.

3 *Bomen en tellingen van lijnen en punten.*

- a) Wanneer heet een graaf een *boom*? Geef de definitie.
- b) Bewijs, dat in een boom het aantal punten V precies I meer is dan het aantal lijnen E .
- c) Gegeven een samenhangende graaf met $|V| = |E| + I$. Bewijs hieruit dat deze graaf een boom moet zijn.

* 4 *Opspannende bomen en algorithmen.*

Gegeven een samenhangende graaf, met op de lijnen een gewichtsfunctie met als waardengebied de positieve reële getallen, en waarbij de gewichten op alle lijnen verschillend zijn. Wij vergelijken het algoritme van *Dijkstra* voor de kortste paden boom met het algoritme van *Prim* voor de minimale opspannende boom.

- a) Geef de definitie van een *opspannende boom* van een samenhangende graaf.
- b) Geef een korte beschrijving van het algoritme van *Dijkstra*.
- c) Geef een korte beschrijving van het algoritme van *Prim*.
- d) Het is mogelijk dat bij hetzelfde beginpunt de algorithmen van *Dijkstra* en *Prim* een verschillende boom opleveren. Bedenk een kleine gewogen graaf, met een aangewezen beginpunt, waarvoor dit het geval is.

NORMERING

Elke goed beantwoorde multiple choice vraag geeft 1 pt.

Voor de overige vragen gelden de volgende puntenaantallen :

1a 4 pt	2b 2 pt	3a 1 pt	4a 1 pt	4d 2 pt
1b 4 pt	2c 3 pt	3b 4 pt	4b 3 pt	
2a 2 pt	2d 3 pt	3c 4 pt	4c 3 pt	

$$CIJFER = \frac{SOM}{5} + 1.$$

Naam:

Studierichting en jaar:

14-8-2002

Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.

In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag precies één alternatief juist én volledig.

- 5 Een graaf $G = (V, E)$ is een Hamilton graaf als
- ☐ G een gesloten wandeling bevat die elk punt van V één keer aandoet.
 - ☐ G samenhangend is en geen bruggen bevat.
 - ☐ G een opspannende cykel bevat.
 - ☐ G een geïnduceerde cykel bevat.
 - ☐ G een cykel bevat die elke lijn van E één keer aandoet.
- 6 Een k -reguliere graaf is
- ☐ een volledige graaf met k elementen.
 - ☐ een gerichte graaf waarin elk punt in- en uitgraad k heeft.
 - ☐ een gewogen graaf waarbij elke lijn het gewicht k krijgt.
 - ☐ de graaf die een regelmatig k -vlak (polyeder) voorstelt.
 - ☐ een graaf waarin elk punt van graad k is.
- 7 Zij $G = (V_1, V_2, E)$ een tweedelingsgraaf en W een deelverzameling van V_1 . Een toewijzing van W in V_2 is
- ☐ een volledige koppeling in de opspannende deelgraaf op de punten van W en V_2 .
 - ☐ een toekenning van ten hoogste $|W|$ punten uit V_2 aan W .
 - ☐ een verzameling B van burens van W zo dat $|B| \geq |W|$.
 - ☐ een koppeling tussen de punten van W en V_2 die alle punten van W verzadigt.
 - ☐ een koppeling in G die de punten van W onverzadigd laat.
- 8 Een netwerk is
- ☐ een gerichte graaf met bron en put waarin aan elke pijl een positief getal (de capaciteit) is toegekend.
 - ☐ een gerichte graaf met een bron en put waartussen een stroom loopt.
 - ☐ een gewogen graaf (de gewichten stellen de capaciteit voor).
 - ☐ een gerichte graaf met bron en put waarin aan elke pijl een niet-negatief getal (de stroom) is toegekend.

Z.O.Z.

- 9 Met de Dijkstra algoritme construeert men
- ☐ een minimale rondwandeling in een afstandsgraaf.
 - ☐ een minimale padenboom in een gewogen graaf.
 - ☐ een minimale toewijzing in een gewogen graaf.
 - ☐ een maximale stroom in een netwerk.
- 10 De stroomsterkte van een stroom f in een netwerk met bron b en put p is
- ☐ de som van de stromen op de pijlen van het netwerk.
 - ☐ de som van alle stromen op een f -onverzadigd pad van b naar p .
 - ☐ de verhouding tussen de stroom door een snede en haar capaciteit.
 - ☐ $\sum_{x \in B} \sum_{y \in P} f(x, y)$ waarbij (B, P) een snede is tussen bron en put.
 - ☐ de som van alle stromen op de pijlen van p .
- 11 De geheeltallige stroomstelling stelt dat in een netwerk met geheeltallige capaciteiten en met een bron en put
- ☐ uitsluitend geheeltallige stroomsterktes kunnen optreden.
 - ☐ er een maximum stroom bestaat die geheeltallig is.
 - ☐ de stroomsterkte van iedere maximum stroom geheeltallig is.
 - ☐ elke stroom die niet geheeltallig is kan worden verhoogd tot een geheeltallige stroom.
- 12 De stelling van Berge-Petersen zegt:
- ☐ Een koppeling F is volledig precies dan als F alle punten verzadigt.
 - ☐ Een koppeling F is maximaal precies dan als er geen vergrotend F -wisselpad bestaat.
 - ☐ Elke twee koppelingen F, F' met $|F| = |F'|$ kunnen in in elkaar worden overgevoerd door uitwisselen van lijnen.
 - ☐ Een koppeling F is maximum precies dan als er geen vergrotend F -wisselpad bestaat.
- 13 Het Handelsreizigersprobleem is het probleem om in een gewogen graaf
- ☐ de bijhorende verbindingsmatrix te bepalen.
 - ☐ een rondwandeling te vinden van minimaal gewicht.
 - ☐ een pad van minimaal gewicht te vinden tussen twee punten.
 - ☐ de bijhorende afstandsfunctie te bepalen.
 - ☐ een Hamilton-cykel te vinden van minimaal gewicht.