

Eerste Deeltentamen Inleiding Grafentheorie 24-2-2000

In dit tentamen gebruiken wij tenzij anders gemeld uitsluitend grafen zonder lussen of parallelle lijnen, met dien verstande, dat in een gerichte graaf antiparallelle lijnen zijn toegestaan. Bovendien gebruiken we uitsluitend verbindings matrices met nullen op de hoofd diagonaal.

1 *De Petersen graaf.*

- a) Wat betekent het als een graaf **regulier** van graad **d** is? Geef de definitie.
- b) De **Petersen graaf** kan worden beschreven op de volgende manier: De *punten* zijn alle deelverzamelingen met twee elementen uit de verzameling met vijf elementen $\{a, b, c, d, e\}$ en de *lijnen* worden getrokken tussen punten die geen element gemeen hebben (zo is er b.v. een lijn $\{a, c\} - \{b, e\}$). Geef een (gangbare) tekening van de **Petersen graaf** en zet de hierboven gegeven labels bij de punten.
- c) Laat zien dat de *Petersen graaf* **regulier** is en bepaal de graad. Wat is de kortst mogelijke lengte van een cykel in deze graaf?

2 *Graden van punten in gerichte en ongerichte grafen.*

- a) In een ongerichte graaf met ten minste twee punten zonder lussen of dubbele lijnen komen twee verschillende punten voor van gelijke graad. Bewijs dit.
- b) In een gerichte graaf is het mogelijk, dat alle graden verschillend zijn. Geef een voorbeeld.
- c) In een gerichte graaf is het mogelijk, dat alle ingraden van de punten verschillend zijn, en tevens ook alle uitgraden van de punten verschillend zijn. Geef een voorbeeld.
- d) Als in een gerichte graaf de ingraden van alle punten verschillend zijn, dan kan het aantal lijnen van de graaf worden uitgedrukt in het aantal punten. Geef de formule met een korte toelichting.

Z.O.Z.

3 *Het splitsen van een punt in het bewijs van de stelling van Euler.*

Gegeven is een samenhangende vlakke graaf waarin alle punten een even graad hebben. Bij het construeren van een *Euler ronde* kan worden geprobeerd om net zo lang punten te splitsen tot elk punt de graad 2 heeft.

- a) Als we uit gaan van een punt p van graad 4, die verbonden is met de punten q, r, s en t , dan splitsen we p in twee niet verbonden copieën p_1 en p_2 . Als p_1 verbonden wordt met q en r , en p_2 verbonden wordt met s en t , ontstaat een nieuwe graaf. Als gegeven is dat deze graaf niet samenhangend is, dan wordt de graaf die ontstaat door p_1 te verbinden met q en s en p_2 te verbinden met r en t , in plaats van de eerdere toewijzing, wel samenhangend.

Bewijs dit.

- b) Geef aan, hoe door een geschikte keuze van de splitsingen kan worden gezorgd dat de bijbehorende graaf kan worden getekend *zonder* dat het potlood van het papier wordt gehaald, *zonder* dat een lijn meer dan één maal wordt getrokken, en *zonder* dat het potlood een eerder getrokken lijn kruist.

NORMERING

1a 2 pt	2a 3 pt	2d 3 pt
1b 4 pt	2b 1 pt	3a 5 pt
1c 4 pt	2c 3 pt	3b 5 pt

$$CIJFER = \frac{SOM + 2}{3}.$$