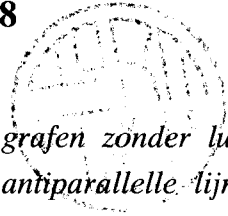


Tentamen Inleiding Grafentheorie 8-1-1998



In dit tentamen gebruiken wij tenzij anders gemeld uitsluitend grafen zonder lussen of parallelle lijnen, met dien verstande, dat in een gerichte graaf antiparallelle lijnen zijn toegestaan.

1 *De Petersen graaf.*

- a) Wat betekent het als een graaf **regulier** van graad d is? Geef de definitie.
- b) De **Petersen graaf** kan worden beschreven op de volgende manier: De *punten* zijn alle deelverzamelingen met twee elementen uit de verzameling met vijf elementen $\{a, b, c, d, e\}$ en de *lijnen* worden getrokken tussen punten die geen element gemeen hebben (zo is er b.v. een lijn $\{a, c\} - \{b, e\}$). Geef een (gangbare) tekening van de **Petersen graaf** en zet de hierboven gegeven labels bij de punten.
- c) Laat zien dat de **Petersen graaf** **regulier** is en bepaal de graad. Wat is de kortst mogelijke lengte van een cykel in deze graaf?

2 *Het splitsen van een punt in het bewijs van de stelling van Euler.*

Gegeven is een samenhangende vlakke graaf waarin alle punten een even graad hebben. Bij het construeren van een **Euler ronde** kan worden geprobeerd om net zo lang punten te splitsen tot elk punt de graad 2 heeft.

- a) Als we uit gaan van een punt p van graad 4, die verbonden is met de punten q, r, s en t , dan splitsen we p in twee niet verbonden copieën p_1 en p_2 . Als p_1 verbonden wordt met q en r , en p_2 verbonden wordt met s en t , ontstaat een nieuwe graaf. Als gegeven is dat deze graaf niet samenhangend is, dan wordt de graaf die ontstaat door p_1 te verbinden met q en s en p_2 te verbinden met r en t , in plaats van de eerdere toewijzing, wel samenhangend. Bewijs dit.
- b) Geef aan, hoe door een geschikte keuze van de splitsingen kan worden gezorgd dat de bijbehorende graaf kan worden getekend **zonder** dat het potlood van het papier wordt gehaald, **zonder** dat een lijn meer dan één maal wordt getrokken, en **zonder** dat het potlood een eerder getrokken lijn kruist.

3 *De stelling van Dirac.*

- a) Geef de definitie van een Hamilton toer in een graaf G , en formuleer de stelling van Dirac betreffende het bestaan van zo'n toer in G .
- b) Zij G een graaf die voldoet aan de voorwaarde(n) uit de stelling van Dirac, en zij $x_1, x_2, \dots, x_n$ een pad in G door alle punten. Argumenteer dat dit pad kan worden omgezet in een Hamilton toer.

In wat volgt stelt G de graaf voor, waarvan de punten zijn: alle 2-punts verzamelingen in $\{1, 2, \dots, 8\}$ (waarbij we afkorten: $12 = \{1, 2\}$, etc.), en waar twee punten verbonden zijn door een lijn als en alleen als de representaties van deze punten disjunct zijn. (Het punt 12 is bij voorbeeld wel verbonden met 35 maar niet met 15).

- c) Geef het aantal punten van G en laat zien dat G voldoet aan de voorwaarde(n) uit de stelling van Dirac.
- d) Gegeven het pad $12, 34, 56, 78, 35, 46, 57, 68, 37, 48, 15, 24, 16, 25, 17, 26, 14, 27, 36, 47, 58, 67, 45, 38$ (van lengte 23) en het punt 13 in G , laat zien dat het pad aan de uiteinden niet meer kan worden verlengd, en konstrueer een pad van lengte 24 op voornoemde punten.

4 *Centrum en centroide.*

- a) Construeer een boomgraaf waarin het centrum en de centroide beiden uit een enkel punt bestaan, en verschillend zijn, waarin alleen punten van de graad 3 en 1 voorkomen, en waarbij alle drie de takken uitgaande van de centroide gelijk gewicht hebben.
- b) Construeer een boomgraaf, waarin uitsluitend de graden 1 en 3 voorkomen, waarin het centrum en de centroide beiden uit 2 punten bestaan en deze één punt gemeen hebben.

★ 5 *Opspannende bomen en het algoritme van Dijkstra.*

- a) Geef de definitie van een *opspannende boom* van een samenhangende graaf.
- b) Gegeven een samenhangende graaf $G = (V, E)$, met op de lijnen een gewichtsfunctie met als waardengebied de positieve reële getallen. In deze graaf is een punt v_o gegeven. Beschrijf hoe met het algoritme van *Dijkstra* voor elk van de andere punten v_i van de graaf een kortste pad wordt gegenereerd van v_o naar v_i .
- c) In het algoritme in stap b) kunnen de lijnen worden gemerkt, die liggen op de kortste paden vanuit v_o . Toon aan dat de vereniging van de zo gemerkte lijnen een opspannende boom voor G definieert.

NORMERING

1a 2 pt	2a 5 pt	3b 4 pt	4a 6 pt	5b 4 pt
1b 3 pt	2b 4 pt	3c 2 pt	4b 4 pt	5c 2 pt
1c 3 pt	3a 2 pt	3d 2 pt	5a 2 pt	

$$CIJFER = \frac{SOM}{5} + 1.$$