

tentamen formele structuren
28 maart 2008

Opgave 1.

- (a) Geef van elk van de volgende functies in $[0, 1] \rightarrow [3, 5]$ aan of hij injectief, surjectief en/of bijectief is. Motiveer elk negatief antwoord met een voorbeeld (voor een positief antwoord volstaat het antwoord alleen).

(i) $f : x \mapsto 5$.

(ii) $g : x \mapsto 5 - 2x$.

(iii) $h : x^2 - x + 5$.

(5 punten)

- (b) Laat zien dat de reële intervallen $A = [0, 2]$ en $B = (0, 1)$ gelijkmachting zijn.

(5 punten)

- (c) Geef van de volgende verzamelingen aan of ze aftelbaar of overaftelbaar oneindig zijn (het antwoord alleen volstaat):

(i) de verzameling $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$,

(ii) de verzameling $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$,

(iii) de verzameling $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

(5 punten)

Opgave 2. Gegeven is het deductief systeem over het alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ met één axioma:

ba

en twee afleidingsregels:

$$\frac{bxa}{x} \text{ (R1)}$$

$$\frac{bx \quad ya}{bx ya} \text{ (R2)}$$

- (a) Geef alle strings die je in ten hoogste drie stappen kunt afleiden.

NB: het axioma telt als één stap.

(4 punten)

- (b) Is de string $babab$ afleidbaar? Zo ja, geef een afleiding. Zo nee, bewijs dat de string niet afleidbaar is.

(5 punten)

- (c) Bewijs dat alle strings van de vorm $(ba)^n$ afleidbaar zijn.

Zijn dat alle afleidbare strings? Motiveer je antwoord.

(6 punten)

Opgave 3. Deze opgave gaat over talen over $\{0, 1\}$.

- (a) Geef een reguliere expressie voor de taal bestaande uit de strings met een even aantal 0-en.
(5 punten)
- (b) Geef een deterministische eindige automaat (DEA) voor de taal $(10)^*0$.
(5 punten)
- (c) Beredeneer dat de taal bestaande uit de strings waarin het aantal 0-en vijf groter is dan het aantal 1-en niet regulier is.
(6 punten)

Opgave 4.

- (a) Geef de transitiegraaf van de Turing machine die precies de strings van de vorm $0^{2p}1^p$ accepteert.
(8 punten)
- (b) Gegeven is de Turing machine met de volgende transitietabel:

q_0	0	0	R	q_0
q_0	1	1	R	q_0
q_0	—	—	L	q_1
q_1	0	—	L	q_2
q_1	1	—	L	q_3
q_2	0	0	L	q_2
q_2	1	1	L	q_2
q_2	—	0	R	stop
q_3	0	0	L	q_3
q_3	1	1	L	q_3
q_3	—	1	R	stop

De Turing machine begint in toestand q_0 met het lezen van een eindige string over $\{0, 1\}$.

- (i) Wat is het resultaat als de string op de tape 0001 is?
- (ii) Wat is het resultaat als de string op de tape 110 is?
- (iii) Wat doet de machine in het algemeen?

(6 punten)

De axioma's van de procesalgebra zijn gegeven als bijlage.

Opgave 5. Deze opgave gaat over PA, dus zonder communicatie.

Hier zijn a , b , en c atomaire acties.

Zijn de volgende vergelijkingen geldig in PA? Zo ja, geef een afleiding in PA.

Zo nee, laat zien dat de bijbehorende grafen niet bisimilaar zijn.

(a) $(a + b) \parallel c = a \parallel (b + c)$.

(5 punten)

(b) $(a + b) \parallel (a + c) = (a + b)(a + c) + (a + c)(a + b)$.

(5 punten)

Opgave 6. Deze opgave gaat over PA, dus zonder communicatie.

Teken de procesgraaf van X gedefinieerd door de volgende recursievergelijkingen

(a , b en c zijn atomaire acties):

$$\begin{aligned} X &= (a + bX)Y \\ Y &= cXY \end{aligned}$$

(5 punten)

Opgave 7. Deze opgave gaat over ACP (met communicatie).

We gebruiken atomaire acties a , a' , b , en a^* . De communicatiefunctie is gedefinieerd als $\gamma(a, a') = a^*$. Verder is gegeven $H = \{a, a'\}$.

(a) Teken de procesgraaf $G(bab \parallel (a + a'))$.

(5 punten)

(b) Teken het δ -schone overblijfsel $\Delta_H(G(bab \parallel (a + a')))$.

(5 punten)

(c) Bereken $\partial_H(bab \parallel (a + a'))$.

(5 punten)

De axioma's van de procesalgebra

- (A1) $x + y = y + x$
- (A2) $x + (y + z) = (x + y) + z$
- (A3) $x + x = x$
- (A4) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
- (A5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

- (A6) $x + \delta = x$
- (A7) $\delta \cdot x = \delta$

- (CF1) $a \mid b = \gamma(a, b)$ als $\gamma(a, b)$ gedefinieerd
- (CF2) $a \mid b = \delta$ als $\gamma(a, b)$ niet gedefinieerd

- (CM1) $x \parallel y = x \parallel y + y \parallel x + x \mid y$
- (CM2) $a \parallel y = a \cdot y$
- (CM3) $(a \cdot x) \parallel y = a \cdot (x \parallel y)$
- (CM4) $(x + y) \parallel z = x \parallel z + y \parallel z$
- (CM5) $(a \cdot x) \mid b = (a \mid b) \cdot x$
- (CM6) $a \mid (b \cdot y) = (a \mid b) \cdot y$
- (CM7) $(a \cdot x) \mid (b \cdot y) = (a \mid b) \cdot (x \parallel y)$
- (CM8) $(x + y) \mid z = x \mid z + y \mid z$
- (CM9) $x \mid (y + z) = x \mid y + x \mid z$

- (D1) $\partial_H(a) = a$ als $a \notin H$
- (D2) $\partial_H(a) = \delta$ als $a \in H$
- (D3) $\partial_H(x + y) = \partial_H(x) + \partial_H(y)$
- (D4) $\partial_H(x \cdot y) = \partial_H(x) \cdot \partial_H(y)$