



tentamen formele structuren
23 maart 2004

Opgave 1.

- (a) Gegeven zijn drie functies van $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ door:

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 \\g(x) &= (x - \tfrac{1}{2})^2 \\h(x) &= \tfrac{1}{2}x\end{aligned}$$

Geef voor alle drie de functies aan of ze injectief, surjectief, bijectief zijn. Motiveer elk negatief antwoord met een voorbeeld.

NB: $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$.

(4 punten)

- b. Gegeven zijn de verzamelingen

$$\begin{aligned}A &= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\} \\B &= \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq -3\}\end{aligned}$$

Geef een bijectie tussen A en B en leg uit waarom het een bijectie is.

(4 punten)

- c. Zij P een aftelbare verzameling en Q een overaftelbare verzameling.

Beargumenteer dat $Q \setminus P = \{x \mid x \in Q \text{ en } x \notin P\}$ overaftelbaar is.

(4 punten)

- d. Geef drie verschillende overaftelbare verzamelingen.

(3 punten)

Opgave 2. Gegeven is het deductief systeem over het alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ met één axioma:

b

en twee afleidingsregels:

$$(R1) \quad \frac{xb \quad y}{xay} \qquad (R2) \quad \frac{ax}{x}$$

- a. Geef een afleiding van de string $aaab$.

(5 punten)

- b. Laat zien dat de string $aaabb$ niet afleidbaar is.

(5 punten)

- c. Is het systeem beslisbaar? Motiveer je antwoord.

(5 punten)

Opgave 3.

- a. Teken een deterministische eindige automaat (DEA) die de taal herkent bestaande uit alle strings over $\{0, 1\}$ ter lengte kleiner dan vier.
(5 punten)
- b. Geef een reguliere expressie die de taal uit 3a beschrijft.
(5 punten)
- c. Geef een bewijs dat de volgende taal L niet kan worden beschreven met een reguliere expresse:

$$L = \{s \in \{0, 1\}^* \mid \text{het aantal 0-en in } s \text{ is 5 groter dan het aantal 1-en}\}$$

(5 punten)

Opgave 4. Deze opgave gaat over Turing Machines.

We gaan ervan uit dat de input tape een eindige string over $\{0, 1\}$ bevat (en verder alleen blanco symbolen $-$), en dat de kop van de Turing Machine aan het begin bij het meest linkse symbool van de input string staat.

- a. Geef de transitietabel van de Turing Machine die precies de strings van de vorm $0^p 1^{2q}$ herkent, met $p, q \in \{0, 1, 2, \dots\}$.
(7 punten)
- b. Geef de transitietabel van de Turing Machine die precies de strings van de vorm $1^p 0^p$ herkent, met $p \in \{0, 1, 2, \dots\}$.
(8 punten)

Opgave 5. Deze opgave gaat over procesalgebra met merge *zonder communicatie*.

- a. Werk de term $(a + b) \parallel (cd + e)$ uit tot basisprocessterm.
(5 punten)
- b. Bewijs dat de volgende gelijkheid *niet* geldt: $ac = a(b + c)$.
(5 punten)
- c. Los op als procesgraaf (Y is het hulpproces):

$$\begin{aligned} X &= aY + b \\ Y &= cXX \end{aligned}$$

(5 punten)

Opgave 6. Deze opgave gaat over procesalgebra met merge *met communicatie*.

- a. Werk δ zoveel mogelijk weg uit de processterm $p = a\delta b + a(b + \delta)c + \delta(a + b)$.
Teken ook het δ -schone overblijfsel van $G(p)$ (dat is $\Delta(G(p))$).
(5 punten)
- b. We werken met de verzameling acties $A = \{a, a', a'', b, c, d, e\}$.
De communicatiefunctie γ is gedefinieerd als $\gamma(a, a') = a''$.
Teken $G(abc \parallel dea')$.
(5 punten)
- c. Dit is een vervolg op vraag 6b;
we hebben nu bovendien gegeven $H = \{a, a'\}$.
Teken $\Delta_H(G(abc \parallel dea'))$.
(5 punten)

Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.

De axioma's van de procesalgebra

- (A1) $x + y = y + x$
- (A2) $x + (y + z) = (x + y) + z$
- (A3) $x + x = x$
- (A4) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
- (A5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

- (A6) $x + \delta = x$
- (A7) $\delta \cdot x = \delta$

- (CF1) $a \mid b = \gamma(a, b)$ als $\gamma(a, b)$ gedefinieerd
- (CF2) $a \mid b = \delta$ als $\gamma(a, b)$ niet gedefinieerd

- (CM1) $x \parallel y = x \parallel y + y \parallel x + x \mid y$
- (CM2) $a \parallel y = a \cdot y$
- (CM3) $(a \cdot x) \parallel y = a \cdot (x \parallel y)$
- (CM4) $(x + y) \parallel z = x \parallel z + y \parallel z$
- (CM5) $(a \cdot x) \mid b = (a \mid b) \cdot x$
- (CM6) $a \mid (b \cdot y) = (a \mid b) \cdot y$
- (CM7) $(a \cdot x) \mid (b \cdot y) = (a \mid b) \cdot (x \parallel y)$
- (CM8) $(x + y) \mid z = x \mid z + y \mid z$
- (CM9) $x \mid (y + z) = x \mid y + x \mid z$

- (D1) $\partial_H(a) = a$ als $a \notin H$
- (D2) $\partial_H(a) = \delta$ als $a \in H$
- (D3) $\partial_H(x + y) = \partial_H(x) + \partial_H(y)$
- (D4) $\partial_H(x \cdot y) = \partial_H(x) \cdot \partial_H(y)$