



tentamen formele structuren
26 maart 2003

Opgave 1.

- (a) Gegeven zijn de verzamelingen reële getallen $A = [0, 1]$ en $B = [3, 5]$.

Geef een functie van $A \rightarrow B$ die

- (i) een injectie maar geen surjectie is,
- (ii) een bijectie is,
- (iii) een surjectie, maar geen injectie is,
- (iv) geen surjectie en geen injectie is.

(8 punten)

- (b) Welke van de volgende verzamelingen zijn aftelbaar? (Alleen het antwoord volstaat.)

- (i) de verzameling van alle eindige rijtjes natuurlijke getallen,
- (ii) de verzameling van alle functies van de natuurlijke getallen naar de verzameling $\{0, 1\}$,
- (iii) de verzameling van alle eindige rijtjes reële getallen,
- (iv) de verzameling van alle eindige deelverzamelingen van de rationale getallen.

(7 punten)

Opgave 2. Gegeven is een deductief systeem over het alfabet $\{0, 1\}$ met één axioma:

10

en twee afleidingsregels:

$$(R1) \quad \frac{x}{x0}$$

$$(R2) \quad \frac{x0}{x10}$$

- (a) Geef een afleiding van de string 110100.

(5 punten)

- (b) Is de string 110101 afleidbaar? Geef een afleiding, of bewijs dat de string niet afleidbaar is.

(5 punten)

- (c) Is dit systeem beslisbaar? Waarom (niet)?

(2 punten)

Opgave 3.

- (a) Geef een deterministische eindige automaat (DEA) voor de taal over $\{0,1\}$ die bestaat uit alle strings die eindigen op 011.
(6 punten)
- (b) Beschrijf de taal gevraagd in 3a ook door middel van een reguliere expressie.
(4 punten)
- (c) Gegeven is een taal L over een alfabet S . We definiëren de taal L' door: $L' = S^* \setminus L$ (dwz. L' bestaat uit alle strings over S die niet tot L behoren.) Bewijs, of weerleg door een tegenvoorbeeld:

Als L regulier is dan is ook L' regulier.

(5 punten)

Opgave 4.

- (a) Construeer een Turing machine die, startend met de kop op het meest linkse symbool van een eindige string over het alfabet $\{0,1\}$, in deze string elke 1 door een 0 vervangt en dan stopt.
(5 punten)
- (b) Gegeven is de Turing machine T met transitietabel

q_0	1	1	R	q_0
q_0	0	0	R	q_1
q_1	1	1	R	q_1
q_1	0	0	R	q_0
q_0	—	—	L	accept
q_1	—	—	L	reject

Bij het begin van de berekening leest de kop van de Turing Machine het eerste symbool van de (eindige) string.

- (i) Wordt de string 11010 door T geaccepteerd?
- (ii) Wordt de string 0100 door T geaccepteerd?
- (iii) Geef in het algemeen aan welke strings door T worden geaccepteerd en welke niet.

(10 punten)

Opgave 5.

- (a) Werk de procesterm $ab \parallel (a+c)$ uit tot een basis procesterm (dus zonder $\parallel$ en zonder $\mid\mid$). Maak hierbij gebruik van de axioma's onderaan de pagina.
(5 punten)

- (b) De processen X en Y zijn recursief gedefinieerd door:

$$\begin{aligned} X &= aY \\ Y &= bX + cY \end{aligned}$$

Teken de procesgraaf van X .

(4 punten)

- (c) Hier zijn c en c^* 'halve' acties met communicatie $c|c^* = c^*|c = \underline{c}$.

- (i) Teken de procesgraaf van $\partial(ac \parallel (b + c^*))$.
(Dit is de procesgraaf waar de δ 's zoveel mogelijk uit verwijderd zijn, dus de 'opgeschoonde' variant.)

- (ii) Geef van dit proces $\partial(ac \parallel (b + c^*))$ het deadlockvrije trace.

(5 punten)

- (d) Ook hier zijn c en c^* 'halve' acties met communicatie $c|c^* = c^*|c = \underline{c}$.

Beschouw de recursieve processen

$$\begin{aligned} X &= a.c.c^*.X \\ Y &= c^*.b.c.Y \end{aligned}$$

Geef een oneindig trace van $\partial(X \parallel Y)$.

(4 punten)

De axioma's van procesalgebra

$$\begin{aligned} x + y &= y + x \\ x + (y + z) &= (x + y) + z \\ x + x &= x \\ (x + y) \cdot z &= x \cdot z + y \cdot z \\ x \cdot (y \cdot z) &= (x \cdot y) \cdot z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \parallel y &= x \mid\mid y + y \mid\mid x \\ a \mid\mid y &= a \cdot y \\ (a \cdot x) \mid\mid y &= a \cdot (x \mid\mid y) \\ (x + x') \mid\mid y &= x \mid\mid y + x' \mid\mid y \end{aligned}$$

Opgave 6.

- (a) Bekijk het termherschrijfsysteem gedefinieerd door de volgende regels:

$$\begin{array}{lcl} b & \rightarrow & a \\ b & \rightarrow & c \\ c & \rightarrow & b \\ c & \rightarrow & d \end{array}$$

Geef alle normaalvormen van de term b .

Heeft de term b de eigenschap UN?

(5 punten)

- (b) Breid het termherschrijfsysteem uit 6a uit met één nieuwe regel tot een systeem dat wel de eigenschap UN heeft maar niet confluent is.

(5 punten)

- (c) De functie sum neemt als input een natuurlijk getal n en geeft als output de som van alle natuurlijke getallen tot en met n . De specificatie van sum is als volgt:

$$\begin{array}{lcl} \text{sum}(0) & = & 0 \\ \text{sum}(n+1) & = & \text{sum}(n) + n + 1 \end{array}$$

De natuurlijke getallen worden gerepresenteerd door de symbolen 0 voor nul en S voor successor. Breid het (bekende) termherschrijfsysteem voor optellen

$$\begin{array}{lcl} A(x, 0) & \rightarrow & x \\ A(x, S(y)) & \rightarrow & S(A(x, y)) \end{array}$$

uit met herschrijfgeregels voor sum .

(5 punten)

Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.