

tentamen formele structuren
5 juni 2002

Opgave 1.

- (a) Laat zien dat de verzamelingen $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ en $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\}$ evenveel elementen bezitten door het aangeven van een bijectie.
(6 punten)
- (b) Laat zien dat er evenveel deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ zijn als oneindige 01-rijen door het aangeven van een bijectie tussen $\wp(\mathbb{N})$ en $2^{\mathbb{N}}$. (Welke verzameling correspondeert met de rij 0000...? Welke met 010101...?)
(6 punten)
- (c) Welke van de genoemde verzamelingen $A, B, \wp(\mathbb{N}), 2^{\mathbb{N}}$ zijn aftelbaar?
(3 punten)

Opgave 2. Gegeven is een deductief systeem over het alfabet $\{a, b\}$ met één axioma:

bab

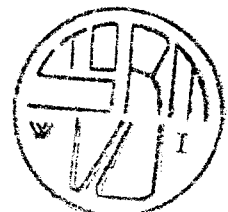
en drie afleidingsregels:

$$(R1) \quad \frac{xay}{xy}$$

$$(R2) \quad \frac{x}{xx}$$

$$(R3) \quad \frac{xbbby}{xy}$$

- (a) Is de lege string afleidbaar? Zo ja, geef een afleiding, zo nee, bewijs waarom niet.
(5 punten)
- (b) Geef een afleiding van de string bbbbbb.
(5 punten)
- (c) Bewijs dat de string bbbbbb niet afleidbaar is.
(5 punten)



Opgave 3.

- (a) Geef een deterministische eindige automaat (DEA) voor de taal over $\{0, 1\}$ bestaande uit alle strings waarin de string 110 niet als substring voorkomt.
(6 punten)
- (b) Geef voor de volgende talen over het alfabet $\{0, 1\}$ aan of ze regulier zijn. Ja/nee volstaat als antwoord.
- (i) De verzameling van alle strings die tweemaal zoveel 1-en als 0-en bevatten.
 - (ii) De verzameling van alle strings waarvan het aantal 1-en twee meer is dan het aantal 0-en.
 - (iii) $0^*(11)^*$.
 - (iv) De verzameling strings waarvan het eerste en het laatste symbool verschillen.
 - (v) De verzameling strings die niet meer dan 1000 symbolen bevatten.
- (6 punten)
- (c) L_1 en L_2 zijn talen over Σ met $L_1 \subseteq L_2$. Bewijs of weerleg (door een tegenvoorbeeld) de volgende bewering:
als L_2 regulier is, dan is L_1 regulier.
(3 punten)

Opgave 4. Deze opgave gaat over Turing Machines.

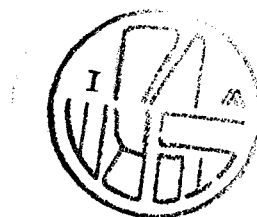
- (a) Gegeven is een input tape met de representatie van een natuurlijk getal en verder alleen blanco symbolen $\square$. Een natuurlijk getal n wordt gerepresenteerd door $n + 1$ keer een symbool 1. De kop van de Turing Machine staat bij het meest linkse symbool van de representatie van het getal.

Geef de transitietabel van een Turing Machine die de predecessor functie implementeert. De predecessor is een functie van natuurlijke getallen naar natuurlijke getallen die het volgende doet:

- 0 wordt afgebeeld op 0,
- n met $n > 0$ wordt afgebeeld op $n - 1$.

Een tweede eis aan de gevraagde Turing Machine is dat de kop aan het eind van de berekening bij het eerste symbool van de output string staat.

(6 punten)



- (b) Geef de transitietabel van de Turing Machine die precies de strings van de vorm $0^{2p}1^{3q}$ accepteert.

We gaan ervan uit dat de input tape een eindige string over $\{0, 1\}$ bevat (en verder alleen blanco symbols $-$), en dat de kop van de Turing Machine aan het begin van de berekening bij het meest linkse symbool van de input string staat.

(6 punten)

- (c) Geef een voorbeeld van een taal die wel door een Turing Machine maar niet door een deterministische eindige automaat herkend kan worden.

(3 punten)

Opgave 5.

- (a) Reken de procesterm $(a + b \cdot c) \parallel d$ uit tot basisprocesterm.

(5 punten)

- (b) Geef een beschrijving van een proces met het oneindige trace $ababab \dots$

(5 punten)

- (c) Teken de procesgraaf van het proces gegeven door de vergelijkingen

$$\begin{aligned} X &= (b + c) \cdot a \cdot Y + d \\ Y &= c \cdot X \end{aligned}$$

(met Y als hulpproces).

(5 punten)

De axioma's van procesalgebra

$$\begin{aligned} x + y &= y + x \\ x + (y + z) &= (x + y) + z \\ x + x &= x \\ (x + y) \cdot z &= x \cdot z + y \cdot z \\ x \cdot (y \cdot z) &= (x \cdot y) \cdot z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \parallel y &= x \parallel y + y \parallel x \\ a \parallel y &= a \cdot y \\ (a \cdot x) \parallel y &= a \cdot (x \parallel y) \\ (x + x') \parallel y &= x \parallel y + x' \parallel y \end{aligned}$$



Opgave 6.

- (a) De natuurlijke getallen worden gerepresenteerd door $0, S(0), S(S(0)), \dots$; *true* wordt gerepresenteerd door T , en *false* door F .

We willen dat E van twee natuurlijke getallen bepaalt of ze gelijk zijn, d.w.z. $E(t, s) \rightarrow T$ als t en s gelijke getallen zijn, en $E(t, s) \rightarrow F$ als t en s verschillende getallen zijn.

Geef herschrijfgeregels voor E die dit bewerkstelligen.

(7 punten)

- (b) Bezie de TRS $\mathcal{R}$ met regels

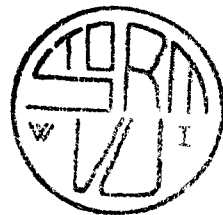
$$a \rightarrow b$$

$$b \rightarrow b$$

$$a \rightarrow c$$

- (i) Wat zijn de normaalvormen van $\mathcal{R}$?
- (ii) Geef een oneindige reductierij in $\mathcal{R}$.
- (iii) Heeft $\mathcal{R}$ unieke normaalvormen (UN)? (Motiveer.)
- (iv) Is $\mathcal{R}$ confluent? (Motiveer.)

(8 punten)



Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.