

Uitwerking tentamen Basiswiskunde 1 voor AI 27 mei 2009

$$\text{Eindcijfer} = 1 + \frac{\text{totaal}}{10}$$

Opgave 1. (15 punten)

De functie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$f(x) = x - 2\ln(x).$$

Ga na of f een lokaal minimum of maximum heeft en geef aan waar zich dat bevindt.

Er geldt $f'(x) = 1 - \frac{2}{x}$, dus $f'(x) = 0$ impliceert $x = 2$. Omdat $f' < 0$ op $(0, 2)$ en $f' > 0$ op $(2, \infty)$ heeft f een (lokaal) minimum bij 2.

Opgave 2. (20 punten)

Bereken:

a) $\int 3x^2 \ln(x) dx$

b) $\int_1^\infty 2xe^{-x^2} dx$

a) Partiële integratie levert

$$\begin{aligned} \int 3x^2 \ln(x) dx &= x^3 \ln(x) - \int x^3 \frac{1}{x} dx = x^3 \ln x - \int x^2 dx \\ &= x^3 \ln x - \frac{1}{3} x^3 = x^3 (\ln(x) - \frac{1}{3}). \end{aligned}$$

b) Eerst een primitieve. Substitutie $u = -x^2$, $\frac{du}{dx} = -2x$ levert

$$\int 2xe^{-x^2} dx = - \int e^u du = -e^u = -e^{-x^2}.$$

Daarom

$$\int_1^R 2xe^{-x^2} dx = -e^{-x^2} \Big|_1^R = \frac{1}{e} - e^{-R^2}.$$

Omdat $\lim_{R \rightarrow \infty} e^{-R^2} = 0$ volgt

$$\int_1^\infty 2xe^{-x^2} dx = \frac{1}{e}.$$

Opgave 3. (15 punten)

De functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Verder is gegeven dat

$$f'(x) = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

Bepaal de buigpunten van de grafiek van f .

Volgens de quotiëntregel (en de kettingregel voor de afgeleide van de noemer) geldt

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-4x(x^2 + 1)^2 - (2 - 2x^2)2(x^2 + 1)2x}{(x^2 + 1)^4} \\ &= \frac{-4x^3 - 4x - 8x + 8x^3}{(x^2 + 1)^3} = \frac{4x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}, \end{aligned}$$

dus $f''(x) = 0$ impliceert $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ of $x = -\sqrt{3}$. Merk op dat de noemer steeds positief is. Omdat $f'' < 0$ op $(-\infty, -\sqrt{3})$, $f'' > 0$ op $(-\sqrt{3}, 0)$, $f'' < 0$ op $(0, \sqrt{3})$ en $f'' > 0$ op $(\sqrt{3}, \infty)$ zijn er dus inderdaad bij $-\sqrt{3}$, 0 en $\sqrt{3}$ buigpunten.

Opgave 4. (20 punten)

Bepaal de volgende limieten:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(3 - x)}{x^2 - 9}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + x^3 + 5}}{7x^2 + 13}$

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(3 - x)}{x^2 - 9} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow x} \frac{-\cos(3 - x)}{2x} = -\frac{1}{6}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + x^3 + 5}}{7x^2 + 13} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^4}}}{7 + \frac{13}{x^2}} = \frac{\sqrt{1 + 0 + 0}}{7 + 0 + 0} = \frac{1}{7}$

Opgave 5. (10 punten)

Bepaal de som van de meetkundige reeks

$$7 - \frac{7}{2} + \frac{7}{4} - \frac{7}{8} \cdots = 7 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Er geldt $7 - \frac{7}{2} + \frac{7}{4} - \frac{7}{8} \dots = b + br + br^2 + br^3 + \dots$ met $b = 7, r = -\frac{1}{2}$.
Dus voor de n -de partiële som $S_n = b + br + \dots br^{n-1}$ geldt

$$S_n = b \frac{1 - r^n}{1 - r} = 7 \frac{1 - (-\frac{1}{2})^n}{\frac{3}{2}} = \frac{14}{3} (1 - (-\frac{1}{2})^n).$$

Dus

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{14}{3}.$$

Opgave 6. (10 punten)

Los het volgende beginwaardeprobleem op:

$$\frac{dy}{dt} = 3 - y, \quad y(0) = 4$$

Er geldt $y = 3$ of $\int \frac{1}{3 - y} dy = \int dt + C$ voor een zekere $C \in \mathbb{R}$, dus

$$-\ln |3 - y| = t + C, \quad \text{dus} \quad 3 - y = \pm e^{-C} e^{-t}.$$

Dus $y = De^{-t} + 3$ voor een zekere $D \in \mathbb{R}$. Invullen van $y(0) = 4$ levert $D = 1$, dus $y = e^{-t} + 3$.