

TENTAMEN: STOCHASTISCHE METHODEN voor BWI, vakcode: 400391, dag en datum: dinsdag 15 februari 2011, tijd: 18.30-21.15 uur.

18.30

Puntentelling:

Opgave 1 telt voor 30% van het totaal, waarbij 1(a) 8 punten, 1(b) 5 punten, 1(c) 3 punten, 1(d) 3 punten en 1(e) 11 punten waard is.

Opgave 2 telt voor 25% van het totaal, waarbij 2(a) 10 punten, 2(b) 3 punten, 2(c) 8 punten waard is en 2(d) 4 punten waard is.

Opgave 3 telt voor 25% van het totaal, waarbij 3(a) 10 punten, 3(b) 6 punten en 3(c) 9 punten.

Opgave 4 telt voor 20% van het totaal, waarbij 4(a) 10 punten en 4(b) 10 punten waard is.

Tentamencijfer: (totaal aantal behaalde punten)/10. Vervolgens afronden zoals gebruikelijk.

Opgave 1

Twee rivaliserende sportverenigingen A en B zijn van plan een serie wedstrijden (match) tegen elkaar te gaan spelen om te bepalen wie het beste team van de twee heeft. In hun sport is bij een wedstrijd een gelijkspel mogelijk, maar vanwege de grote strijdlust van de teams is vooraf de verwachting dat de meeste wedstrijden die de teams tegen elkaar zullen spelen in een beslissing zullen resulteren. Een organisatiecommissie heeft voorgesteld dat de match beëindigd wordt als er een verschil van twee is bereikt tussen het aantal gewonnen wedstrijden van de teams. Het team dat dan voorstaat en waarvan in de match op dat moment dus het aantal overwinningen gelijk is aan het aantal nederlagen +2 wordt tot eindwinnaar uitgeroepen en krijgt de bijbehorende prijs en roem. Verder wordt voorgesteld dat de teams afwisselend thuis zullen mogen spelen waarbij er eerlijk geloot zal worden wie als eerste thuis mag spelen.

Sportvereniging A heeft nu een analist ingehuurd die zo goed mogelijk moet inschatten wat de kansen voor team A zijn om onder deze voorwaarden de match te gaan winnen en ook hoeveel wedstrijden de match naar verwachting zal gaan duren. Het bestuur is namelijk bang dat als de match langer dan

6 wedstrijden duurt de belangstelling van de supporters daarna sterk zal teruglopen wat resulteert in minder inkomsten wat dan weer negatief zal uitpakken voor de begroting van de vereniging. De analist heeft een model opgesteld dat alle van belang zijnde factoren meeweegt en samengevat zijn dit de conclusies: als team A thuis speelt zal team A winnen met een kans van 0.50, verliezen met een kans van 0.30 en gelijkspelen met een kans van 0.20. Als team A uit speelt zal team A winnen met een kans van 0.40, verliezen met een kans van 0.55 en gelijkspelen met een kans van 0.05.

- (a). Specificeer een Markov keten met toestanden en de 1-staps overgangskansen om de match onder bovenstaande voorwaarden te analyseren uitgaande van het voorspellingsmodel van de analist en onderstaande vragen te beantwoorden.
- (b). Het bestuur van vereniging A is alleen van plan de match onder bovenstaande voorwaarden te laten doorgaan als de kans dat de match langer dan 6 wedstrijden gaat duren klein genoeg is. Hoe bepaalt u de kans dat de match toch meer dan 6 wedstrijden in beslag zal nemen? Geef uiteindelijk een uitdrukking voor deze kans nadat u de benodigde notatie ingevoerd hebt!
- (c). Geef een stelsel lineaire vergelijkingen waarmee de verwachtingswaarde van het aantal wedstrijden dat de match duurt bepaald kan worden. Geef ook aan hoe uit de oplossing van deze vergelijkingen dan die verwachtingswaarde berekend kan worden. Overigens hoeft hier en in het vervolg alleen een symbolische oplossing gebruikt te worden en is het niet nodig om een numerieke oplossing van het betreffende stelsel vergelijkingen te vinden.
- (d). Het bestuur van vereniging A is er uiteraard ook in geïnteresseerd hoe groot de kans is dat team A onder bovenstaande voorwaarden de match zal winnen en dus de bijbehorende prijs en roem zal krijgen. Laat net als bij de vorige vraag zien hoe deze kans berekend kan worden uit de oplossing van een stelsel vergelijkingen.
- (e). Veronderstel nu dat de teams *A* en *B* onbegrensd vaak tegen elkaar spelen (dus er wordt niet gestopt als één van de teams de match volgens bovenstaande regels gewonnen zou hebben) en er is ook een nieuwe regel met betrekking tot de thuis- en uitwedstrijden. Na een gelijkspel

wordt de volgende wedstrijd nog steeds bij de vereniging gespeeld die als laatste uit speelde, maar bij winst/verlies wordt de volgende wedstrijd gespeeld bij de vereniging die deze laatste wedstrijd gewonnen heeft. Definieer een nieuwe Markov keten waarmee berekend kan worden welk team op de lange duur de meeste wedstrijden zal winnen. Geef de bijbehorende evenwichtsvergelijkingen van deze Markov keten. Wat is de fractie van het aantal wedstrijden dat door team A gewonnen wordt of in gelijkspel eindigt? Stel dat (na een zeer groot aantal voorgaande wedstrijden) er een belangrijke jubileumwedstrijd gespeeld gaat worden. U heeft geen enkele informatie hoe het verloop van de wedstrijden tot nu toe geweest is. Wat is de kans dat team A de jubileumwedstrijd wint? Beargumenteer ook waarom deze kans goed gedefinieerd (en dus eenduidig te bepalen) is.

Opgave 2

Een klein postorderbedrijf heeft zich gespecialiseerd in spoedleveringen. Klanten met spoedorders komen aan volgens een Poisson proces met intensiteit λ . Het postorderbedrijf heeft twee type bezorgservices: snel en supersnel. Een bezorging met de 'super snelle' service is exponentieel verdeeld met parameter μ_1 en de bezorging met de 'snelle' service is exponentieel verdeeld met parameter μ_2 . Wanneer een arriverende order aankomt en de 'supersnelle' service is beschikbaar, dan wordt hiervoor gekozen; is alleen de 'snelle' service beschikbaar, dan wordt deze gebruikt. Wanneer beide services bezet zijn, dan wordt de order in de wacht geplaatst en bezorgd door de service die het eerste vrijkomt. Met het oog op levertijden, kunnen slechts twee orders in de wacht staan (bij twee orders in de wacht worden arriverende orders geweigerd). Het is niet mogelijk om tussentijds van bezorgservice te wisselen.

- Formuleer een geschikte continue-tijd Markov keten en specificeer het toestandsdiagram met de overgangsintensiteiten.
- Geef aan waarom de limietverdeling van deze continue-tijd Markov keten bestaat en onafhankelijk is van de begintoestand.
- Bepaal de evenwichtsvergelijkingen waarmee de evenwichtskansen bepaald kunnen worden (het stelsel hoeft niet expliciet opgelost te worden).

- (d). Stel dat de evenwichtskansen uit vraag (c) bepaald zijn. Wat is de fractie tijd dat de 'snelle' service in gebruik is? Wat is de fractie orders die geweigerd worden? Beargumenteer de antwoorden.

Opgave 3

In een haven met een onbeperkt aantal ligplaatsen komen schepen aan volgens een Poisson proces met parameter λ . Elk van de schepen moet gelost worden en daarvoor is slechts 1 losinstallatie beschikbaar. De losinstallatie kan aan slechts 1 schip tegelijk werken. De zuivere lostijd van een schip is exponentieel verdeeld met verwachtingswaarde $1/\mu$. Tijdens het lossen van een schip kan de losinstallatie door een storing getroffen worden. In dat geval wordt het lossen van het schip onderbroken en wordt weer hervat op het moment dat de storing verholpen is. De tijd dat de losinstallatie zonder storingen werkt is exponentieel verdeeld met verwachting $1/\alpha$, terwijl de tijd nodig om een storing te verhelpen een exponentiële verdeling met verwachting $1/\beta$ heeft. Voor alle duidelijkheid een losinstallatie kan niet door een storing getroffen worden als de installatie niet aan het werk is.

- (a). Definieer de toestandsvariabelen voor een geschikte continue-tijds Markov keten om de situatie in deze haven te beschrijven en bijvoorbeeld vragen over het gemiddeld aantal aanwezige schepen in deze haven te kunnen beantwoorden. Specificeer het toestandsdiagram en de infinitesimale transitie-intensiteiten.
- (b). Specificeer het stelsel vergelijkingen waaraan de evenwichtskansen voldoen.
- (c). Geef aan hoe uit de evenwichtskansen het gemiddeld aantal schepen in de haven en de gemiddelde verblijftijd van een schip in de haven berekend kunnen worden. Wat is de kans dat een aankomend schip meteen gelost kan worden? Beargumenteer uw antwoorden!

Opgave 4

- (a). Beschouw het $M/G/\infty$ model met oneindig veel bediendes waar klanten aankomen volgens een Poisson proces met parameter λ en de bedieningstijd S van elke klant een algemene kansverdeling heeft met verwachtingswaarde $E(S)$. De bedieningstijden van de klanten zijn onafhankelijk en identiek verdeeld. Hoe luidt de limietverdeling van het aantal bezette bediendes? Leid dit resultaat eerst af voor het speciale geval dat de bedieningstijd een constante D is (dus niet uitgaan van de formule voor de limietverdeling en daarin $E(S)$ vervangen door D , maar voor dit speciale geval een preciese wiskundige afleiding van de formule geven!). Vervolgens leid het resultaat af voor het speciale geval dat de bedieningstijd gelijk is aan de constante D_1 met kans p_1 en gelijk aan de constante D_2 met kans $p_2 = 1 - p_1$.
- (b). In het toeristisch dorpje Edam komen vanaf s'ochtends vroeg tot s'avonds 19:00 uur toeristenbussen uit Amsterdam aan volgens een Poisson proces met een gemiddelde van 3 bussen per uur en onafhankelijk daarvan toeristenbussen uit Haarlem volgens een Poisson proces met een gemiddelde van 2 bussen per uur. In het dorp is een heel groot parkeer terrein waar praktisch gezien een onbeperkt aantal bussen terecht kan. Een toeristenbus uit Amsterdam blijft altijd precies 2 uren op de parkeerplaats in Edam wachten, terwijl een toeristenbus uit Haarlem met kans $\frac{1}{3}$ precies 1 uur blijft en met kans $\frac{2}{3}$ precies 2 uren blijft. Wanneer er s'middags een bus met toeristen uit Amsterdam arriveert wat is de kans dat deze toeristen op dat moment 4 of meer andere uit Amsterdam gekomen bussen aantreffen op de parkeerplaats? Wat is de kans dat er s'middags om vier uur in totaal 6 of meer bussen op de parkeerplaats aanwezig zijn? Beargumenteer uw antwoorden.

