

**TENTAMEN: STOCHASTISCHE METHODEN voor BWI, vakcode: 400391, dag en datum: woensdag 9 juni 2010, tijd: 18.30-21.15 uur.**

**Puntentelling:**

Opgave 1 telt voor 30% van het totaal, waarbij 1(a) 8 punten, 1(b) 6 punten, 1(c) 3 punten, 1(d) 3 punten en 1(e) 10 punten waard is.

Opgave 2 telt voor 25% van het totaal, waarbij 2(a) 11 punten, 2(b) 9 punten en 2(c) 5 punten waard is.

Opgave 3 telt voor 25% van het totaal, waarbij 3(a) 8 punten, 3(b) 10 punten en 3(c) 7 punten waard is.

Opgave 4 telt voor 20% van het totaal, waarbij 4(a) 7 punten, 4(b) 7 punten en 4(c) 6 punten waard is.

**Tentamencijfer:** (totaal aantal behaalde punten)/10. Vervolgens afronden zoals gebruikelijk.

**Opgave 1**

Twee tennisers A en B gaan een serie wedstrijden (match) tegen elkaar spelen totdat één van beiden drie wedstrijden achter elkaar gewonnen zal hebben. Die speler zal dan de eindwinnaar zijn. Voor de eerste wedstrijd geldt dat beiden 50 % kans hebben om te winnen. Als A de laatste wedstrijd gewonnen heeft dan wint A de volgende wedstrijd met 70 % kans en verliest dus met 30 % kans. Als B de laatste wedstrijd gewonnen heeft dan wint B de volgende wedstrijd met 60 % kans en verliest dus met 40 % kans.

- (a). Specificeer een Markov keten met toestanden en de 1-staps overgangskansen om de match te analyseren en onderstaande vragen te beantwoorden.
- (b). Hoe kan voor een willekeurig positief geheel getal  $L$  de kans bepaald worden dat de match precies  $L$  wedstrijden in beslag zal nemen? Geef uiteindelijk een uitdrukking voor deze kans nadat u de benodigde notatie ingevoerd hebt!
- (c). Geef een stelsel vergelijkingen waarmee de verwachtingswaarde van het aantal wedstrijden dat de match duurt bepaald kan worden. Geef ook

aan hoe uit de oplossing van deze vergelijkingen dan die verwachtingswaarde berekend kan worden. Overigens hoeft hier en in het vervolg alleen een symbolische oplossing gebruikt te worden en is het niet nodig om een numerieke oplossing van het betreffende stelsel vergelijkingen te vinden.

- (d). Geef een stelsel vergelijkingen waarmee de kans dat A de match wint bepaald kan worden. Geef ook een uitdrukking van deze kans.
- (e). Veronderstel nu dat A en B voortaan elke week één keer een wedstrijd tegen elkaar spelen (hiermee wordt niet meer gestopt als één van de spelers de match volgens bovenstaande regels gewonnen zou hebben). Specificeer een nieuwe Markov keten met toestanden en 1-staps overgangskansen waarmee onder meer de fractie wedstrijden die speler A op de lange duur zal winnen bepaald kan worden. Geef daarna een stelsel vergelijkingen waarmee de evenwichtskansen bepaald worden. Wat is de fractie van wedstrijden die A op de lange duur zal verliezen? Laat  $p_A(n)$  de kans zijn dat speler A de  $n$ -de wedstrijd tussen beide spelers wint. Waarom bestaat  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_A(n)$ ? Waarom is deze limiet niet afhankelijk van de kans dat A de eerste wedstrijd wint?

## Opgave 2

Beschouw de situatie bij een kleine halte waar maximaal 5 personen kunnen wachten op vervoer (taxi). Beschikbare taxi's komen langs deze halte met exponentieel verdeelde tussentijden met verwachting  $\frac{1}{\mu}$ . Zo een passerende taxi neemt indien mogelijk 3 personen mee, maar als er maar 1 of 2 personen staan te wachten vertrekt de taxi meteen met alleen deze personen als passagier. Als er niemand staat te wachten dan stopt een passerende taxi niet bij deze kleine halte. Potentiële passagiers komen bij de halte aan volgens een Poisson proces met parameter  $\lambda$ . Deze potentiële passagiers blijven zeker wachten als er minder dan 3 wachtenden zijn. Als er echter al minstens 3 wachtenden zijn dan is de kans  $\frac{1}{2}$  dat een arriverende potentiële passagier bij de halte blijft wachten en anders zoekt deze alternatief vervoer. Bovendien als de halte al vol is met 5 wachtenden dan zal een arriverende potentiële passagier nooit blijven wachten en dus zeker alternatief vervoer zoeken.

- (a). Definieer een continue-tijds Markov keten om de situatie bij de halte te kunnen analyseren. Specificeer de toestanden, de infinitesimale transitie-

intensiteiten  $q_{ij}$  en het bijbehorend toestandsdiagram. Schrijf daarna het stelsel vergelijkingen op waarmee de evenwichtskansen bepaald kunnen worden (het stelsel hoeft niet expliciet opgelost te worden).

- (b). Stel dat de evenwichtskansen uit vraag (a) bepaald zijn. Beantwoord daarmee de volgende vragen en beargumenteer de antwoorden! Wat is op de lange duur het gemiddelde aantal personen dat bij de halte staat te wachten? Wat is de fractie van potentiële passagiers die niet bij deze halte zullen wachten maar alternatief vervoer zullen zoeken? Wat is de fractie van alle passerende taxi's die 3 passagiers bij deze halte zal meenemen. Wat is het gemiddelde aantal passagiers per tijdseenheid dat in een taxi vanaf deze halte vertrekt?
- (c). Veronderstel nu dat iedereen die bij deze halte blijft wachten op een taxi slechts bereid is om een bepaalde tijd te blijven wachten. Deze "geduldtijd" is exponentieel verdeeld met parameter  $\theta$  en is onafhankelijk voor verschillende wachtende personen. Als de geduldtijd van iemand verstreken is en deze dan nog niet is kunnen meegaan met een taxi dan vertrekt de persoon meteen ongeacht hoeveel andere wachtenden er op dat moment zijn. Stel voor deze nieuwe situatie het toestandsdiagram op of geef alle  $q_{ij}$  die ten opzichte van onderdeel (a) veranderd zijn. Geef uitgaande van de evenwichtskansen van de nieuwe continue-tijds Markov keten een uitdrukking voor het gemiddeld aantal personen dat per tijdseenheid de halte verlaat omdat hun geduld op is om nog langer op een taxi te wachten.

### Opgave 3

Bepaalde soorten trekvogels komen in het voorjaar vanuit Afrika naar broedplaatsen in Europa gevlogen. Ga uit van de (hypothetische) veronderstellingen dat gedurende de gehele trekperiode vogels van een bepaalde soort aan de tocht beginnen volgens een Poisson proces met een gemiddelde van  $\lambda$  vogels per dag en dat ze allemaal hun broedplaats zullen bereiken. Bovendien nemen we aan dat de vogels onafhankelijk van elkaar een stochastische tijd onderweg zijn met een gemiddelde van 9 dagen en een spreiding van 2 dagen.

- (a). Wat is uitgaande van bovenstaande gegevens het verwachte aantal vogels van de betreffende soort dat op een willekeurig moment midden in

het trekseizoen onderweg is? Welk wachtrijmodel kan gebruikt worden om de evenwichtsverdeling te bepalen van het aantal vogels dat onderweg is? Geef voor dit wachtrijmodel voor een algemene stochastische bedieningstijd  $S$  de formule voor de evenwichtsverdeling. Pas vervolgens de formule op de beschreven vogeltrek toe om de kans te bepalen dat op een willekeurig moment midden in het trekseizoen er meer dan 1000 vogels van de betreffende soort onderweg zijn.

- (b). Beschouw nu een (speciaal) soort vogels waarvan elk exemplaar precies  $D$  dagen over de tocht doet, waarbij we er weer van uitgaan dat vogels van deze soort aan hun tocht beginnen volgens een Poisson proces met een gemiddelde van  $\lambda$  per dag. Geef de limietverdeling van het aantal vogels dat van deze soort onderweg is en een sluitende probabilistische redenering waaruit die limietverdeling volgt. Stel nu dat de vogels van deze soort met kans  $p_1$  precies  $D_1$  dagen onderweg zijn en met kans  $p_2 = 1 - p_1$  precies  $D_2$  dagen onderweg zijn. Geef ook voor dit geval een sluitende probabilistische redenering waaruit de limietverdeling volgt van het aantal vogels dat van deze soort onderweg is. Let er bij de probabilistische redeneringen op de eigenschappen van Poisson processen die nodig zijn te noemen en toe te passen.
- (c). Er is onderweg een bepaalde plaats waar vogels die er langskomen indien mogelijk rusten om op krachten te komen. Er is echter maar plaats voor maximaal 50 vogels en als het vol is zal een passerende vogel doorgeliezen om ergens anders te rusten. De vogels die wel terecht kunnen verblijven er een uniform verdeelde tijd van minimaal 1 uur en maximaal 5 uur. Neem bovendien aan dat de trekvogels bij deze plaats aankomen volgens een Poisson proces met een gemiddelde van 20 per uur. Waarom is het Erlang verliesmodel geschikt om de situatie te analyseren en onderstaande vragen te beantwoorden? Wat is volgens dit model de evenwichtsverdeling van het aantal vogels dat op de plaats aanwezig is? Hoe groot is de kans dat een passerende trekvogel de plaats vol aantreft en zal moeten doorgeliezen? Beargumenteer uw antwoord!

#### Opgave 4

In een productie/voorraadsysteem komen producten voor de verkoop één voor één gereed met tussentijden die onafhankelijk zijn en exponentieel verdeeld zijn met verwachtingswaarde  $1/\alpha$ . Zodra een eenheid product gereed is, wordt het op de planken gelegd voor verkoop. Klanten voor het product komen aan volgens een Poisson proces met parameter  $\beta$ . Het wordt verondersteld dat  $\alpha < \beta$ . Elke klant vraagt één eenheid van het product. Is het product niet voorradig op de planken, dan gaat de klant naar elders om het product te kopen.

- (a). Specificeer de toestanden en het toestandsdiagram van de continue-tijds Markovketen die de aanwezige voorraad op de planken beschrijft. Geef de evenwichtsvergelijkingen voor de limietverdeling van de voorraad op de planken (u hoeft deze vergelijkingen niet expliciet op te lossen).
- (b). Geef aan hoe uit de evenwichtskansen het volgende berekend kan worden en beargumenteer uw antwoorden! Wat is de gemiddelde voorraad op de planken? Wat is de kans op nee-verkoop bij een klant? Wat is de gemiddelde hoeveelheid tijd dat een eenheid product op de planken ligt alvorens het verkocht wordt?
- (c). Veronderstel nu dat de voorraad op de planken aan bederf onderhevig is. De houdbaarheidsduur van elke eenheid voorraad is exponentieel verdeeld met verwachtingswaarde  $1/\gamma$ . Als de houdbaarheidsduur van een eenheid verstreken is, kan het niet meer verkocht worden en wordt het van de planken verwijderd. Beantwoord vraag (a) opnieuw voor deze situatie.

