

**TENTAMEN STOCHASTISCHE METHODEN voor
BWI, 3 juni 2008, 18.30-21.15 uur; geen rekenmachine
toegestaan**

Opgave 1

Twee teams A en B spelen tegen elkaar totdat één van de teams drie wedstrijden achter elkaar gewonnen heeft. Voor elke wedstrijd geldt dat deze met kans 0.1 in een gelijkspel eindigt. De eerste wedstrijd en elke wedstrijd na een gelijkspel wordt met kans 0.5 door team A en met kans 0.4 door team B . Na winst van een team geldt dat dit team de volgende wedstrijd wint met kans 0.60 en de volgende wedstrijd verliest met kans 0.3.

- (a). Specificeer de toestand en de 1-stapsovergangskansen van een Markov keten om dit probleem te analyseren. Wat is de kans dat de tweekamp meer dan een gegeven aantal van L wedstrijden in beslag neemt?
- (b). Bereken de verwachtingswaarde van de duur van de tweekamp via een stelsel lineaire vergelijkingen. Hoe bereken je de kans dat team A eindwinnaar wordt?
- (c). Veronderstel nu dat de teams A en B onbegrensd vaak tegen elkaar spelen (dus er wordt niet gestopt als één van de teams drie keer achterelkaar wint). Definieer een nieuwe Markov keten waarmee berekend kan worden hoe vaak speler A op de lange duur gemiddeld wint of remise speelt. Geef de evenwichtsvergelijkingen van deze Markov keten (u hoeft deze vergelijkingen niet numeriek op te lossen). Wat is de fractie van het aantal partijen dat door speler A gewonnen wordt of in remise eindigt? Stel dat de volgende wedstrijd - die gespeeld gaat worden na een zeer groot aantal voorgaande wedstrijden - een jubileumwedstrijd is. U heeft geen enkele informatie hoe het verloop van de wedstrijden tot nu toe geweest is. Wat is de kans speler A de jubileumwedstrijd wint en argumenteer waarom deze kans welgedefinieerd is?

Opgave 2

Bloedzakken met bloed van een zeldzaam type komen bij een bloedcentrale en met tussentijden die onafhankelijk zijn en exponentieel verdeeld zijn met verwachtingswaarde $1/\alpha$. Een binnenkomende bloedzak wordt op voor-gelegd om aan vraag vanuit ziekenhuizen te voldoen. Het vraagproces tot ziekenhuizen naar deze bloedzakken is een Poisson proces met parameter λ (voor de duidelijkheid: elke keer is de vraag voor slechts één bloedzak).

tegelijk) Het wordt verondersteld dat $\alpha < \beta$. Is het product niet in voorraad bij de bloedbank, dan wordt met een noodleverantie vanuit het buitenland geleverd.

- (a). Specificeer het toestandsdiagram van de continue-tijds Markov keten die de aanwezige voorraad beschrijft. Geef de evenwichtsvergelijkingen voor de limietverdeling van de voorraad (u hoeft deze vergelijkingen niet expliciet op te lossen).
- (b). Wat is de gemiddelde voorraad op de planken? Wat is de kans dat een vraag door noodleverantie vanuit het buitenland vervuld moet worden? Wat is de gemiddelde hoeveelheid tijd dat een bloedzak in voorraad gehouden wordt? Beargumenteer uw antwoorden!
- (c). Veronderstel nu dat het bloed niet onbeperkt in voorraad gehouden kan worden doordat het aan bederf onderhevig is. De houdbaarheidsduur van elke binnenkomende bloedzak is exponentieel verdeeld met verwachtingswaarde $1/\eta$. Als de houdbaarheidsduur van een bloedzak verstreken is, kan deze niet meer gebruikt worden en wordt deze uit voorraad genomen. Beantwoord vraag (a) opnieuw voor de nieuwe situatie.

Opgave 3 (a) Beschouw het $M/G/\infty$ model met oneindig veel bediendes waar klanten aankomen volgens een Poisson proces met parameter λ en de bedieningstijd S van elke klant een algemene kansverdeling heeft met verwachtingswaarde $E(S)$. De bedieningstijden van de klanten zijn onafhankelijk en identiek verdeeld. Hoe luidt de limietverdeling van het aantal bezette bediendes? Leid beargumenteerd dit resultaat eerst af voor het speciale geval dat de bedieningstijd een constante D is (dus niet invullen met $E(S)$ vervangen door D , maar een preciese wiskundige afleiding geven!). Vervolgens leid beargumenteerd het resultaat af voor het speciale geval dat de bedieningstijd gelijk is aan de constant D_1 met kans p_1 en gelijk aan de constante D_2 met kans $p_2 = 1 - p_1$.

In Edam komen toeristenbussen uit Amsterdam aan volgens een Poisson proces met een gemiddelde van 3 bussen per uur en onafhankelijk daarvan toeristenbussen uit Den Haag volgens een Poisson proces met een gemiddelde van 1.25 bus per uur. In het dorp is een heel groot parkeer terrein voor een beperkt aantal bussen. Een toeristenbus uit Amsterdam blijft precies 1 uur in Edam, terwijl een toeristenbus in Den Haag een uniform verdeelde

Wat is de kans dat
m 5 of meer andere
s'middags om vier
n? Beargumenteer

Vlissingen aan vol-
lag. Als een bana-
aart het schip door
is een beperkt aan-
en. Elke installatie
bananenboot niet
allaties bezet zijn,
De lostijd van een
le van $1/\mu$ dagen.

ijds Markov keten
vervolgens de even-
het aantal bezette
richtsvergelijkingen
enboot moet door-

1 een vaste lostijd
aste lostijd van D_2
de limietverdeling
dat een schip moet
o ja, waarom? Wat

Opgave 3. Deze c

(a) Geef een regul
digen op 100.
(5 punten)

(b) Geef een deter
(0 + 1)(00 + 01
(5 punten)

(c) Beredeneer dat
groter is dan he
(6 punten)

Opgave 4.

(a) Geef de transitie
eindige string ov
(8 punten)

(b) Gegeven is de Tu

(i) Geef een stri
geaccepteerd

(ii) Welke strings

(6 punten)

tegelijk) Het wor
bij de bloedbank,
geleverd.

(a). Specificeer
die de aanw
voor de lim
niet explicie

(b). Wat is de g
vraag door
Wat is de g
gehouden w

(c). Veronderste
kan worden
duur van e
verwachting
verstrekken
voorraad ge
uatie.

Opgave 3 (a) F

waar klanten aan
dieningstijd S va
ingswaarde $E(S)$
identiek verdeel
diendes? Leid b
dat de bediening
gen door D , ma
beargumenteerd
gelijk is aan de
kans $p_2 = 1 - p_1$

(b) In Edam kor
proces met een
toeristenbussen
van 1.25 bus per
onbeperkt aant
uur in Edam, te

De axioma's van de procesalgebra zijn gegeven als bijlage.

Opgave 5. Deze opgave gaat over PA, dus zonder communicatie.

Hier zijn a , b , en c atomaire acties.

Zijn de volgende vergelijkingen geldig in PA? Zo ja, geef een afleiding in PA.

Zo nee, laat zien dat de bijbehorende grafen niet bisimilaair zijn.

(a) $(a \parallel b) + (a \parallel c) = a \parallel (b + c)$.

(5 punten)

(b) $ba \parallel a = (b \parallel a)a + baa$.

(5 punten)

Opgave 6. Deze opgave gaat over PA, dus zonder communicatie.

Teken de procesgraaf van X gedefinieerd door de volgende recursievergelijking (a en b zijn atomaire acties):

$$X = aXX + bX$$

(5 punten)

Opgave 7. Deze opgave gaat over ACP (met communicatie).

We gebruiken atomaire acties a , a' , b , en a^* . De communicatiefunctie is gedefinieerd als $\gamma(a, a') = a^*$. Verder is gegeven $H = \{a, a'\}$.

(a) Teken de procesgraaf $G(aba \parallel (a'b))$.

(5 punten)

(b) Teken het δ -schone overblijfsel $\Delta_H(G(aba \parallel (a'b)))$.

(5 punten)

(c) Bereken $\partial_H(aba \parallel (a'b))$.

(5 punten)

De axioma's van de procesalgebra

- (A1) $x + y = y + x$
- (A2) $x + (y + z) = (x + y) + z$
- (A3) $x + x = x$
- (A4) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
- (A5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

- (A6) $x + \delta = x$
- (A7) $\delta \cdot x = \delta$

- (CF1) $a \mid b = \gamma(a, b)$ als $\gamma(a, b)$ gedefinieerd
- (CF2) $a \mid b = \delta$ als $\gamma(a, b)$ niet gedefinieerd

- (CM1) $x \parallel y = x \parallel y + y \parallel x + x \mid y$
- (CM2) $a \parallel y = a \cdot y$
- (CM3) $(a \cdot x) \parallel y = a \cdot (x \parallel y)$
- (CM4) $(x + y) \parallel z = x \parallel z + y \parallel z$
- (CM5) $(a \cdot x) \mid b = (a \mid b) \cdot x$
- (CM6) $a \mid (b \cdot y) = (a \mid b) \cdot y$
- (CM7) $(a \cdot x) \mid (b \cdot y) = (a \mid b) \cdot (x \parallel y)$
- (CM8) $(x + y) \mid z = x \mid z + y \mid z$
- (CM9) $x \mid (y + z) = x \mid y + x \mid z$

- (D1) $\partial_H(a) = a$ als $a \notin H$
- (D2) $\partial_H(a) = \delta$ als $a \in H$
- (D3) $\partial_H(x + y) = \partial_H(x) + \partial_H(y)$
- (D4) $\partial_H(x \cdot y) = \partial_H(x) \cdot \partial_H(y)$

