

TENTAMEN STOCHASTISCHE METHODEN voor BWI, 25 maart 2008 (geen rekenmachine toegestaan)

Opgave 1

Het voetbalteam van de studentenvereniging Storm speelt elke week op donderdagmiddag een wedstrijd. Het team is normaliter vrijwel onverslaanbaar voor andere studententeams, maar door gebrek aan moraal na een nederlaag of teveel drank na een overwinning wil het team ook wel eens verliezen. Elke gespeelde wedstrijd van het team eindigt in een overwinning, in een gelijkspel of in een nederlaag. De resultaten van alleen de laatst gespeelde wedstrijd is bepalend voor het resultaat van de volgende wedstrijd. Als de laatst gespeelde wedstrijd gewonnen is, dan wordt de volgende wedstrijd gewonnen met kans 0.9 en gelijkgespeeld met kans 0.1. Als de laatst gespeelde wedstrijd een gelijkspel is, dan zijn voor de volgende wedstrijd de kansen op winst, gelijkspel en verlies gelijk aan 0.8, 0.1 en 0.1. Deze kansen op winst, gelijkspel en verlies zijn 0.7, 0.15 en 0.15 als de laatst gespeelde wedstrijd verloren ging. Stel een Markov keten op ter beantwoording van de volgende vragen:

- (a). De komende tien wedstrijden die op het programma staan zijn belangrijk, met name de twee wedstrijden die over negen en tien weken gespeeld worden ~~komende wedstrijden~~ tegen het team van de UvA. Hoe bereken je de kans dat Storm de tiende wedstrijd wint en de kans dat Storm zowel de negende als de tiende wedstrijd wint als Storm de afgelopen week gespeelde wedstrijd gewonnen heeft?
- (b). Hoe bereken je de kans dat Storm in de komende tien wedstrijden geen enkele keer verliest als Storm de afgelopen week gespeelde wedstrijd gewonnen heeft?
- (c). Hoe kun je met een stelsel lineaire vergelijkingen de verwachtingswaarde berekenen van het wedstrijden dat het duurt totdat Storm voor het eerst verlies na de laatste gespeelde wedstrijd gewonnen te hebben?
- (d). Beschouw vervolgens dat Storm tot in lengte van dagen elke week een wedstrijd speelt. Specificeer de evenwichtsvergelijkingen van de Markov keten (u hoeft deze niet numeriek op te lossen!) Wat is op de lange duur de fractie van het aantal wedstrijden dat Storm wint? Wat is de kans dat de jubileumwedstrijd die pas over een zeer groot aantal wedstrijden gespeeld gaat worden, gewonnen wordt? Waarom is deze

limietkans welgedefinieerd? Tenslotte veronderstel dat de faculteit voor elke gewonnen strijd 100 euro uitkeert aan Storm, maar Storm 150 euro laat betalen voor elke verloren wedstrijd. Wat is op de lange duur de gemiddelde netto opbrengst per wedstrijd voor Storm?

Opgave 2

In een haven zijn twee losinstallaties aanwezig. Schepen die in de haven gelost moeten worden, komen aan volgens een Poisson proces met een gemiddelde van $\lambda = 3$ schepen per dag. De lostijd van een schip is exponentieel verdeeld met een verwachtingswaarde van $1/\mu = 0.5$ dag (een schip maakt gebruik van slechts één losinstallatie). De kaderuimte is voldoende groot zodat elk aankomend schip blijft wachten totdat het gelost kan worden.

- (a). Specificeer eerst het toestandsdiagram van de continue-tijds Markov keten die het aantal aanwezige schepen beschrijft (doe dit in termen van λ en μ , dus laat de getalwaarden voor λ en μ maar buiten beschouwing). Vervolgens stel de evenwichtsvergelijkingen op.
- (b). Wat is het gemiddeld aantal schepen aan de kade dat wacht tot het lossen van het schip begint. Hoe bereken je de gemiddelde wachttijd van een schip (exclusief de lostijd)? Geef een beargumenteerd antwoord op de vraag wat de kans is de kans dat een aankomend schip niet direct gelost kan worden.
- (c). Veronderstel nu dat een schip dat aan de kade wacht tot het lossen begint na een bepaald moment ongeduldig wordt en doorvaart naar een even verderop gelegen haven. De tijd dat een schip bereid is geduldig te wachten is exponentieel verdeeld met verwachtingswaarde $1/\theta$. Specificeer het toestandsdiagram voor de nieuwe situatie.

Opgave 3

(a) Beschouw het $M/G/\infty$ model met oneindig veel bediendes waar klanten aankomen volgens een Poisson proces met parameter λ en de bedieningstijd S van elke klant een algemene kansverdeling heeft met verwachtingswaarde $E(S)$. Hoe luidt de limietverdeling van het aantal bezette bediendes? Leid dit resultaat eerst af voor het speciale geval dat de bedieningstijd een constante D is (dus niet invullen met $E(S)$ vervangen door D , maar een wiskundige afleiding geven!). Vervolgens leid het resultaat af voor het geval dat de bedieningstijd gelijk is aan de constante D_1 met kans p_1 en gelijk aan de constante

D_2 met kans $p_2 = 1 - p_1$.

(b) Bij de service afdeling van een Japans topmerk komen auto's voor een service beurt binnen volgens een Poisson proces met een gemiddelde van 12 per dag. De kans is 0.9 dat binnen een dag de servicebeurt van een gebrachte auto klaar is, maar er is ook een kans van 0.1 dat de servicebeurt van een auto twee dagen in beslag neemt. In het geval dat iemand zijn auto voor twee dagen moet achterlaten voor een servicebeurt, krijgt hij/zij een leenauto voor die twee dagen mee. Er zijn voldoende leenauto's aanwezig. Wat is de kans dat op een gegeven moment meer dan 5 leenauto's in gebruik zijn door klanten?

Opgave 4

(a) Beschouw het Erlang verliesmodel met c bedienden en een Poisson aankomstproces met intensiteit λ . Voor het speciale geval dat de bedieningstijd S van een klant exponentieel verdeeld is met verwachtingswaarde $E(S) = 1/\mu$, stel het toestandsdiagram op van de Markov keten die uiteindelijk leidt tot het resultaat dat de limietkans op j bezette bediendes gegeven wordt door $p_j = \frac{[\lambda E(S)]^j / j!}{\sum_{k=0}^c [\lambda E(S)]^k / k!}$ voor $j = 0, 1, \dots, c$ (nb: deze formule hoeft u verder niet af te leiden).

(b) In het pittoreske stadje Edam komen toeristenbussen uit Amsterdam binnen volgens een Poisson proces met een gemiddelde van 3 per uur. Bij het stadje is speciaal een parkeerplaats voor toeristen bussen aangelegd die ruimte biedt voor 7 bussen. Een aankomende toeristenbus die de parkeerplaats vol treft, rijdt door naar Volendam. Elke toeristenbus uit Amsterdam blijft precies één uur in Edam. Wat is de kans dat een aankomende toeristenbus gedwongen is door te rijden naar Volendam? Geef deze gevraagde kans ook voor de situatie dat naast de toeristenbussen uit Amsterdam onafhankelijk daarvan toeristenbussen uit Den Haag aankomen volgens een Poisson proces met een gemiddelde van één bus per uur, waarbij een bus uit Den Haag een uniform verdeelde tijd tussen vier kwartier en vijf kwartier in Edam blijft. Licht uw antwoorden toe.

Tentamencijfer: $\max[1, \text{totale aantal punten}/8]$ (elke som 20 punten).

Som 1(a),(b),(c) elk 4 punten, 1(d) 8 punten; Som 2(a),(b),(c) 8, 7, 5 punten.

Som 3(a) 12 punten, 3(b) 8 punten; Som 4(a) 8 punten, 4(b) 12 punten.

