

TENTAMEN STOCHASTISCHE METHODEN voor BWI, 23 maart 2007, 12.00-14.45 uur

Opgave 1

Twee teams A en B spelen tegen elkaar totdat één van de teams drie wedstrijden achter elkaar gewonnen heeft. Voor elke wedstrijd geldt dat deze met kans 0.1 in een gelijkspel eindigt. De eerste wedstrijd en elke wedstrijd na een gelijkspel wordt met kans 0.5 door team A en met kans 0.4 door team B . Na winst van een team geldt dat dit team de volgende wedstrijd wint met kans 0.60 en de volgende wedstrijd verliest met kans 0.3.

- (a). Specificeer de toestand en de 1-stapsovergangskansen van een Markov keten om dit probleem te analyseren. Wat is de kans dat de tweekamp meer dan een gegeven aantal van L wedstrijden in beslag neemt?
- (b). Bereken de verwachtingswaarde van de duur van de tweekamp via een stelsel lineaire vergelijkingen. Hoe bereken je de kans dat team A eindwinnaar wordt?
- (c). Veronderstel nu dat de teams A en B onbegrensd vaak tegen elkaar spelen (dus er wordt niet gestopt als één van de teams drie keer achterelkaar wint). Definieer de toestand en de 1-stapsovergangskansen van een Markov keten waarmee berekend kan worden met welke frequentie speler A wint. Geef de evenwichtsvergelijkingen van de Markov keten (u hoeft deze vergelijkingen niet op te lossen). Wat is de fractie van het aantal partijen dat door speler A gewonnen wordt of in remise eindigt?

Opgave 2

In een productie/voorraadsysteem komen producten voor de verkoop één voor één gereed met tussentijden die onafhankelijk zijn en exponentieel verdeeld zijn met verwachtingswaarde $1/\alpha$. Zodra een eenheid product gereed is, wordt het op de planken gelegd voor verkoop. Klanten voor het product komen aan volgens een Poisson proces met parameter β . Het wordt verondersteld dat $\alpha < \beta$. Elke klant vraagt één eenheid van het product. Is het product niet voorradig op de planken, dan gaat de klant naar elders om het product te kopen.

- (a). Specificeer het toestandsdiagram van de continue-tijds Markov keten die de aanwezige voorraad op de planken beschrijft. Geef de even-

wichtsvergelijkingen voor de limietverdeling van de voorraad op de planken (u hoeft deze vergelijkingen niet expliciet op te lossen).

- (b). Wat is de gemiddelde voorraad op de planken? Wat is de kans op neeverkoop bij een klant? Wat is de gemiddelde hoeveelheid tijd dat een eenheid product op de planken ligt alvorens het verkocht wordt?
- (c). Veronderstel nu dat de voorraad op de planken aan bederf onderhevig is. De houdbaarheidsduur van elke eenheid voorraad is exponentieel verdeeld met verwachtingswaarde $1/\eta$. Als de houdbaarheidsduur van een eenheid verstreken is, kan het niet meer verkocht worden en wordt het van de planken verwijderd. Beantwoord vraag (a) opnieuw voor deze situatie.

Opgave 3 (a) Beschouw het $M/G/\infty$ model met oneindig veel bediendes waar klanten aankomen volgens een Poisson proces met parameter λ en de bedieningstijd S van elke klant een algemene kansverdeling heeft met verwachtingswaarde $E(S)$. De bedieningstijden van de klanten zijn onafhankelijk en identiek verdeeld. Hoe luidt de limietverdeling van het aantal bezette bediendes? Leid dit resultaat eerst af voor het speciale geval dat de bedieningstijd een constante D is (dus niet invullen met $E(S)$ vervangen door D , maar een wiskundige afleiding geven!). Vervolgens leid het resultaat af voor het speciale geval dat de bedieningstijd gelijk is aan de constant D_1 met kans p_1 en gelijk aan de constante D_2 met kans $p_2 = 1 - p_1$.

(b) Een informatiecentrum verstrekt informatie in twee talen. Verzoeken tot informatie komen telefonisch binnen. Een voldoende groot aantal tweetalige informatrices is aanwezig om elk binnenkomend verzoek direct te behandelen. Verzoeken van major-talige klanten komen binnen volgens een Poisson proces met een gemiddelde van λ_1 per uur, en, onafhankelijk daarvan, verzoeken van minor-talige klanten volgens een Poisson proces met een gemiddelde van λ_2 per uur. De afhandeltijd van een major-talig verzoek is lognormaal verdeeld met verwachting van α_1 minuten en een spreiding van σ_1 minuten, terwijl voor een minor-talig verzoek de afhandeltijd lognormaal verdeeld is met verwachting van α_2 minuten en een spreiding van σ_2 minuten. Wat is de limietverdeling van het aantal bezette informatrices? Beargumenteer uw antwoord.

Opgave 4

Bananenboten uit Zuid-Amerika komen bij de haven van Vlissingen aan volgens een Poisson proces met een gemiddelde van λ per dag. Als een bana-

nenboot niet direct in Vlissingen gelost kan worden, dan vaart het schip door naar de haven van Antwerpen. In de haven van Vlissingen is een beperkt aantal van N losinstallaties beschikbaar voor de bananenboten. Elke installatie kan slechts 1 schip tegelijk lossen. Als een aankomende bananenboot niet direct in Vlissingen gelost kan worden omdat alle losinstallaties bezet zijn, dan vaart het schip door naar de haven van Antwerpen. De lostijd van een schip is exponentieel verdeeld met een verwachtingswaarde van $1/\mu$ dagen.

- (a). Specificeer het toestandsdiagram van de continue-tijds Markov keten die het aantal bezette losinstallaties beschrijft. Geef vervolgens de evenwichtsvergelijkingen voor de limietverdeling p_j van het aantal bezette losinstallaties. Kunt u de oplossing van de evenwichtsvergelijkingen geven? Wat is de kans dat een aankomende bananenboot moet doorvaren naar Antwerpen?
- (b). Veronderstel nu dat een bananenboot met kans p_1 een vaste lostijd van D_1 dagen heeft en met kans $p_2 = 1 - p_1$ een vaste lostijd van D_2 dagen. Zijn de hierboven gevonden resultaten voor de limietverdeling van het aantal bezette losinstallaties en voor de kans dat een schip moet doorvaren bruikbaar voor de nieuwe situatie? Zo ja, waarom en wat is de aanpassing die nodig is?

Puntentelling (elke som 20 punten)

Som 1(a),(b) elk 10 punten.

Som 2(a),(b), (c) 7, 7, 6 punten .

Som 3(a),(b) elk 10 punten.

Som 4(a), (b) 12, 8 punten.

Tentamencijfer: $\max[1, \text{totale aantal punten}/8]$.