

Tentamen Stochastische Methoden voor BWI, 23 december 13.30 – 16.30 uur

1(a) Geef een precieze definitie van een niet-stationair Poisson proces.
(b) Bij de Vrije Universiteit is een zeer groot parkeerterrein met betaald parkeren aangelegd. Om de T tijdseenheden precies is er een bliksemcontrole door de parkeerpolitie en elke nieuwe zwartparkeerder die ze treffen wordt op de bon geslingerd. Stel dat zwartparkeerders op het terrein aankomen volgens een Poisson proces met parameter λ en dat de parkeertijd van elke zwartparkeerder exponentieel verdeeld is met verwachtingswaarde $1/\mu$. Welk stochastisch proces is van toepassing op het aankomstproces van zwartparkeerders die de bon niet ontspringen en op de bon geslingerd worden? Specificeer de aankomstintensiteitsfunctie van dit proces.

2(a) Twee even sterke teams spelen tegen elkaar totdat één van de teams drie keer achterelkaar gewonnen heeft. Laat zien hoe uit de overgangskansen van een geschikt gekozen Markov-keten de kansverdeling van het aantal te spelen wedstrijden kan worden berekend.

(b) Beschouw een discrete-tijds Markov keten met eindige toestandsruimte I en 1-stapsovergangskansen p_{ij} . Hoe zijn de begrippen doorgangstoestand en terugkeertoestand gedefinieerd? Classificeer deze begrippen in termen van een grootheid uitgedrukt in de $p_{ii}^{(n)}$'s en geef een interpretatie van deze grootheid. Geef een tegenvoorbeeld dat aantoont dat de n -stapsovergangskansen $p_{ij}^{(n)}$ niet altijd een gewone limiet hebben voor $n \rightarrow \infty$. Welke limiet met betrekking tot de n -stapsovergangskansen bestaat wel altijd? Onder welke voorwaarden is deze limiet niet afhankelijk van de begintoestand? Geef een probabilistische interpretatie van deze limiet.

3. Beschouw een continue-tijds Markov keten met eindige toestandsruimte I en infinitesimale transitie intensiteiten q_{ij} . Definieer $p_{ij}(t)$ als de kans dat het proces over t tijdseenheden in toestand j zal zijn gegeven dat het nu in toestand i is. Leid een stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen af waaruit de $p_{ij}(t)$'s berekend kunnen worden.

4. Een vertrouwd verschijnsel in het straatbeeld in Israël zijn de zogenoemde Sheruts. Dit zijn groepstaxi's die van een vast punt in een stad naar een andere stad rijden. Stel wij hebben een Sherut standplaats waar slechts plaats is voor één sherut. De sherut heeft 7 zitplaatsen en vertrekt zodra al deze zitplaatsen gevuld zijn door klanten. Wanneer de (volle) sherut vertrokken is, duurt het een exponentiële tijd met verwachting $1/\mu$ alvorens een nieuwe sherut bij de standplaats arriveert. Potentiële klanten komen bij de standplaats aan volgens een Poisson proces met parameter λ . Een aankomende klant blijft alleen dan wachten op vertrek met de sherut als de klant bij aankomst minder dan 7 andere klanten aantreft, anders gaat de klant naar een concurrent elders.

- (a) Formuleer een continue-tijds Markov model om bovenstaand probleem te analyseren. Specificeer de toestanden en het toestandsdiagram met de overgangsintensiteiten.
- (b) Schrijf de evenichtsvergelijkingen van de continue-tijds Markov keten uit.
- (c) Wat is de fractie aankomende klanten die meegaat? Wat is de gemiddelde wachttijd per vervoerde klant? Motiveer uw antwoorden.

5. Bij een reparatiebedrijf met R reparateurs komen opdrachten binnen volgens een Poisson proces met parameter λ . Een opdracht die binnenkomt als alle reparateurs bezig zijn wordt geweigerd. De tijd nodig om een geaccepteerde opdracht uit te voeren is exponentieel verdeeld met verwachting $1/\mu$. Een reparateur werkt aan slechts één opdracht tegelijk.

- (a) Geef een beargumenteerde afleiding van de evenwichtsverdeling van het aantal bezette reparateurs en geef een formule voor de fractie van opdrachten die geweigerd worden. Welk bekend wachttijdmodel herkent u in dit probleem?
- (b) Stel nu dat twee soorten opdrachten onafhankelijk van elkaar binnenkomen, waarbij opdrachten van type i binnenkomen volgens een Poisson proces met parameter λ_i en een constante reparatietijd a_i hebben. Wat wordt nu de fractie van het aantal opdrachten dat geweigerd wordt? Licht uw antwoord toe.

Puntentoekenning:

Som 1(a) 9 pt

som 2(a) 9 pt

som 3 18 pt

Som 1b 9 pt

som 2b 9 pt

Som 4(a) 10 pt

som 5a 10 pt

Som 4(b) 4 pt

som 5b 8 pt

Cijfer voor schriftelijk tentamen : $1 + \text{aantal punten gedeeld door } 10$.