



TENTAMEN STOCHASTISCHE METHODEN voor BWI, 7 februari 2006, 18.30 – 21.30 uur, S-205

Opgave 1

Twee teams A en B spelen tegen elkaar totdat één van de teams drie wedstrijden achter elkaar gewonnen heeft. Voor elke wedstrijd geldt dat deze met kans 0.1 in een gelijkspel eindigt. Voor de beginwedstrijd en voor elke wedstrijd na een gelijkspel geldt dat deze even waarschijnlijk (dus kans 0.45) door team A als door team B gewonnen wordt. Na winst van een team geldt dat dit team de volgende wedstrijd wint met kans 0.60 en de volgende wedstrijd verliest met kans 0.3.

- Specificeer de toestand en de 1-stapsovergangskansen van een Markov keten om dit probleem te analyseren. Wat is de kans dat de tweekamp meer dan een gegeven aantal van r wedstrijden in beslag neemt?
- Bereken de verwachte waarde van de duur van de tweekamp via een stelsel lineaire vergelijkingen. Wat is de kans dat team A eindwinnaar wordt? (nb u hoeft de lineaire vergelijkingen niet numeriek op te lossen)
- Stel dat de twee teams onbeperkt vaak tegen elkaar spelen (dus niet stoppen zodra één van de teams drie wedstrijden achter elkaar wint). Laat zien hoe voor de lange duur de fractie van het aantal wedstrijden dat eindigt in winst voor team A berekend kan worden (nb u hoeft geen numerieke berekeningen uit te voeren)

Opgave 2

Twee compartimenten A en B bevatten tezamen r deeltjes. Om de tijdseenheid wordt random één van de deeltjes gekozen en van het compartiment waarin het deeltje zich bevindt overgebracht naar het andere compartiment.

- Specificeer de toestand en de 1-stapsovergangskansen van een Markov keten om het verloop van het aantal deeltjes in elk van de compartimenten te beschrijven.

- (b). Specificeer de evenwichtsvergelijkingen van de Markov keten. Kunt u raden wat de oplossing van deze evenwichtsvergelijkingen is?
- (c). Denkt u dat u de evenwichtskansen in dit probleem ook zou kunnen berekenen als $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$? Zo nee, waarom niet?

Opgave 3

Bij een parkeerterrein met plaats voor N auto's komen parkeerders aan volgens een Poissonproces met intensiteit λ . Een aankomende auto die alle parkeerplaatsen bezet treft, gaat naar elders. De parkeertijd van een auto is exponentieel verdeeld met verwachting $1/\mu$.

- (a). Stel een continue-tijds Markovketen op om dit probleem te analyseren en leid een formule af voor de evenwichtsverdeling van het aantal bezette parkeerplaatsen. Wat is de fractie van het aantal aankomende auto's dat alle plaatsen bezet treft?
- (b). Beschouw nu de situatie dat zowel langparkeerders als kortparkeerders aankomen. De langparkeerders komen aan volgens een Poissonproces met een gemiddelde van 10 auto's per uur en de kortparkeerders volgens een Poissonproces met een gemiddelde van 20 auto's per uur. De parkeertijd van een langparkeerder is lognormaal verdeeld met een verwachtingswaarde van 50 minuten en een spreiding van 40 minuten en die van een kortparkeerder is lognormaal met een verwachtingswaarde van 20 minuten en een spreiding van 10 minuten. Wat is de formule voor de fractie auto's die bij aankomst alle plaatsen bezet treft? Beargumenteer uw antwoord!
- (c). Beschouw vraag (a) opnieuw maar veronderstel nu dat het parkeerterrein enorm groot is zodat plaats is voor een onbeperkt aantal auto's. Wat is nu de kansverdeling van het aantal bezette parkeerplaatsen? Wat wordt deze kansverdeling als de parkeertijd niet exponentieel verdeeld is met verwachting $1/\mu$ maar een gamma verdeling heeft met verwachting α en spreiding β ? Beargumenteer uw antwoord.

Opgave 4

Een bekend verschijnsel in Israel zijn de zogenoemde sheruts. Dit zijn groepstaxis met plaats voor zeven passagiers. Beschouw een sherut standplaats

waar slechts één sherut tegelijk aanwezig kan zijn. Klanten komen bij deze standplaats aan volgens een Poisson proces met parameter λ . Een aankomende klant die reeds zeven wachtende klanten aantreft en ook geen sherut bij de standplaats, gaat naar elders voor vervoer; anders, blijft de klant wachten (of er wel of geen sherut staat). Sheruts komen bij de halte langs volgens onafhankelijke tussentijden die exponentieel verdeeld zijn met verwachting $1/\mu$. Een sherut stopt alleen dan bij de standplaats als daar geen andere sherut staat, anders rijdt de sherut door. Een sherut vertrekt van de standplaats zodra zeven klanten gearriveerd zijn.

- (a). Specificeer de toestand en het toestandsdiagram van een continue-tijds Markov keten om dit probleem te analyseren. Schrijf de lineaire vergelijkingen uit voor de evenwichtskansen.
- (b). Wat is de kans dat een aankomende klant niet blijft wachten en ander vervoer zoekt? Wat is het gemiddeld aantal wachtende klanten en wat is de gemiddelde wachttijd per klant die meegaat?

Elke som is 20 punten. Tentamencijfer: $\max [1, (\text{totale aantal punten})/4]$.
Som 1(a),(b) 7 punten (b) 6 punten; Som 2(a),(b) elk 8 punten (c) 4 punten.
Som 3(a), 9 punten (b), 5 punten (c) 6 punten;
Som 4(a),(b) elk 10 punten