

TENTAMEN STOCHASTISCHE METHODEN VOOR BWI
22 augustus 2005, 13.30-16.30

Opgave 1. Twee tennissers spelen in een tweekamp een serie partijen tegen elkaar totdat één van de spelers drie partijen achterelkaar gewonnen heeft. Voor de eerste partij geldt dat elk van de spelers een kans van 50% heeft om die partij te winnen. Voor elke volgende partij geldt dat deze met een kans van 55% wordt gewonnen door de winnaar van de vorige partij en met een kans van 45% door de verliezer van de vorige partij.

- (a). Formuleer een discrete-tijds Markov keten om de kans te berekenen dat de tweekamp meer dan 20 partijen in beslag neemt. Geef duidelijk de betekenis van uw gekozen toestand aan en specificeer de matrix van 1-stapsovergangskansen. Hoe wordt vervolgens de gevraagde kans berekend?
- (b). Laat zien hoe de verwachte duur van de tweekamp kan worden berekend uit een stelsel lineaire vergelijkingen.

Opgave 2. Een autoverhuurmaatschappij verhuurt haar auto's op vier locaties L_1, L_2, L_3 en L_4 . Een auto die gehuurd wordt op locatie L_1 wordt teruggebracht op locatie L_1 met kans 0.5, wordt teruggebracht op locatie L_2 met kans 0.2, wordt teruggebracht op locatie L_3 met kans 0.2 en wordt teruggebracht op locatie L_4 met kans 0.1. Deze terugbrengkansen hebben de waarden 0.1, 0.75, 0.15 en 0 voor een auto gehuurd op locatie L_2 , de waarden 0.2, 0.1, 0.5 en 0.2 voor een auto gehuurd op locatie L_3 en de waarden 0.2, 0.15, 0.25 en 0.4 voor een auto gehuurd op locatie L_4 .

- (a). Formuleer een discrete-tijds Markov keten om voor een gegeven auto te berekenen wat op de lange duur de frekwentie is waarmee de auto wordt teruggebracht naar locatie L_i voor $i = 1, 2, 3, 4$. Specificeer de toestand en de matrix van 1-stapsovergangskansen. Geef vervolgens het stelsel lineaire vergelijkingen om de evenwichtskansen te berekenen (nb: u hoeft deze niet numeriek op te lossen)
- (b). Een bepaalde auto staat nu op locatie L_4 . Zodra deze auto teruggebracht wordt op locatie L_1 , gaat deze in revisie. Hoe zou u de kans berekenen dat het meer dan 10 verhuurbeurten duurt voor de auto op locatie L_1 arriveert? (Aanwijzing: pas de matrix van 1-stapskansen uit vraag (a) aan zodat u een absorberende Markov keten krijgt).

Opgave 3. In een haven met een onbeperkt aantal ligplaatsen komen schepen aan volgens een Poisson proces met parameter λ . Elk van de schepen

moet gelost worden en daarvoor is slechts 1 losinstallatie beschikbaar. De losinstallatie kan aan slechts 1 schip tegelijk werken. De zuivere lostijd van een schip is exponentieel verdeeld met verwachtingswaarde $1/\mu$. Tijdens het lossen van een schip kan de losinstallatie door een storing getroffen worden. In dat geval wordt het lossen van het schip onderbroken en wordt weer hervat op het moment dat de storing verholpen is. De tijd dat de losinstallatie zonder storingen werkt is exponentieel verdeeld met verwachting $1/\alpha$, terwijl de tijd nodig om een storing te verhelpen een exponentiele verdeling met verwachting $1/\beta$ heeft. Voor alle duidelijkheid een losinstallatie kan niet door een storing getroffen worden als de installatie niet aan het werk is.

- (a). Definieer de toestandvariabele(n) voor een passende continue-tijds Markov keten voor dit probleem en specificeer het toestandsdiagram en de infinitesimale transitie-intensiteiten.
- (b). Specificeer het stelsel vergelijkingen voor evenwichtskansen.
- (c). Geef aan hoe uit de evenwichtskansen het gemiddeld aantal schepen in de haven en de gemiddelde verblijftijd van een schip in de haven berekend kunnen worden. Wat is de kans dat een aankomend schip meteen gelost kan worden?

Opgave 4. Beschouw het $M/G/\infty$ model met oneindig veel bedienden, waar klanten aankomen volgens een Poisson proces met parameter λ en de bedieningstijd B van een klant een algemene kansverdeling heeft met verwachtingswaarde $E(B)$.

- (a). Welk resultaat geldt voor de limietverdeling van het aantal bezette bediendes? Geef een afleiding van dit resultaat voor het geval de bedieningstijd van een klant een constante D is (dus niet in de formule $E(B)$ door D vervangen, maar een probabilistisch bewijs geven)
- (b). Geef vervolgens de afleiding van het resultaat voor de limietverdeling als de bedieningstijd van een klant met kans p_1 gelijk is aan de constante D_1 en met kans $p_2 = 1 - p_1$ gelijk aan de constante D_2 .
- (c). In het pittoreske stadje Edam komen op zomerdagen bussen met toeristen aan volgens een Poisson proces met een gemiddelde van vijf bussen per uur. De tijd dat de bus in Edam blijft is normaal verdeeld met een verwachtingswaarde van drie kwartier en een spreiding van vijf minuten. Wat is de kansverdeling van het aantal bussen dat s' middags om vier uur in Edam aanwezig is? Voor de beantwoording van deze laatste vraag hebben we stilzwijgend aangenomen dat er onbeperkt

veel parkeerruimte voor bussen is. Stel nu eens dat er slechts parkeerruimte is voor zeven toeristenbussen. Een bus die alle parkeerplaatsen bezet treft, blijft niet wachten maar rijdt door naar Volendam. Wat is nu het antwoord op de laatste vraag? Beargumenteer uw antwoord

Opgave 5. In een productie/voorraad systeem komen produkten voor verkoop één voor één gereed met tussentijden die onafhankelijk zijn en exponentieel verdeeld met verwachtingswaarde $1/\alpha$. Zodra een eenheid produkt gereed is, wordt het op de planken gelegd voor verkoop. Klanten voor het produkt komen aan volgens een Poisson proces met parameter β . Er wordt verondersteld dat $\alpha < \beta$. Elke klant vraagt naar 1 eenheid produkt. Als het produkt voorradig is op de planken, dan neemt de klant één eenheid van het produkt mee; anders, gaat de klant naar elders voor het produkt (verloren vraag).

- (a). Specificeer het toestandsdiagram en de evenwichtsvergelijkingen van een continue-tijds Markov keten om de kansverdeling te berekenen van de voorraad op de planken.
- (b). Stel dat u de evenwichtskansen uit vraag (a) heeft berekend. Hoe vindt u vervolgens uit deze kansen de fractie vraag die verloren gaat en de gemiddelde hoeveelheid tijd dat een eenheid produkt op de planken ligt alvorens het verkocht wordt?
- (c). Veronderstel nu dat de voorraad op de planken aan bederf onderhevig is. De houdbaarheidsduur van elke eenheid heeft een exponentiele kansverdeling met verwachtingswaarde $1/\eta$, waarbij de houdbaarheidsduren van de eenheden onafhankelijk van elkaar zijn. Als de houdbaarheidsduur van een eenheid verstreken is, kan het niet meer verkocht worden en wordt het van de planken verwijderd. Hoe worden de antwoorden van de vragen (a) en (b) in dit geval?

Puntentoekenning: elke opgave 18 punten

opgave 1(a) 10 punten, 1(b) 8 punten
opgave 2(a), 2(b), elk 9 punten
opgave 3(a), 3(c), elk 7 punten, 3(b) 4 punten
opgave 4(a), 4(b), elk 5 punten 4(c) 8 punten
opgave 5(a), 5(b), 5(c) elk 6 punten.

Eindcijfer: $1 + (\text{totale aantal punten})/8$