

TENTAMEN STOCHASTISCHE METHODEN voor BWI

30 mei 2005, duur 3 uur

Opgave 1

Twee teams A en B spelen tegen elkaar totdat één van de teams drie wedstrijden achter elkaar gewonnen heeft. Voor de beginwedstrijd en voor elke wedstrijd na een gelijkspel geldt dat deze even met kans 0.10 in een gelijkspel eindigt, en gewonnen wordt door team A met kans 0.45 en door team B ook met kans 0.45. Na winst van een team geldt dat dit team de volgende wedstrijd ook wint met kans 0.60, de volgende wedstrijd verliest met kans 0.3, terwijl met kans 0.1 de volgende wedstrijd in een gelijkspel eindigt. De uitslagen van de verschillende wedstrijden zijn onafhankelijk van elkaar.

- (a). Specificeer de toestand en de 1-stapsovergangskansen van een Markov keten om dit probleem te analyseren. Wat is de kans dat de tweekamp meer dan een gegeven aantal van r wedstrijden in beslag neemt?
- (b). Bereken de verwachte waarde van de duur van de tweekamp via een stelsel lineaire vergelijkingen. Wat is de kans dat team A eindwinnaar wordt?

Opgave 2

Twee compartimenten A en B bevatten tezamen r deeltjes. Om de tijdseenheid wordt random één van de deeltjes gekozen en van het compartiment waarin het deeltje zich bevindt overgebracht naar het andere compartiment.

- (a). Specificeer de toestand en de 1-stapsovergangskansen van een Markov keten om het verloop van het aantal deeltjes in elk van de compartimenten te beschrijven.
- (b). Specificeer de evenwichtsvergelijkingen van de Markov keten. Kunt u raden wat de oplossing van deze evenwichtsvergelijkingen is?

Opgave 3

Een bekend verschijnsel in Israel zijn de zogenoemde sheruts. Dit zijn groepstaxis met plaats voor zeven passagiers. Beschouw een sherut standplaats

waar slechts één sherut tegelijk aanwezig kan zijn. Potentiele passagiers komen bij deze standplaats aan volgens een Poisson proces met parameter λ . Een aankomende passagier die reeds zeven wachtende passagiers aantreft en nog geen sherut bij de halte, begeeft zich naar elders voor vervoer. Anders, blijft de passagier wachten (ook als de passagier geen sherut bij de standplaats treft). Sheruts komen bij de halte langs volgens tussentijden die exponentieel verdeeld zijn met verwachting $\frac{1}{\mu}$. Een sherut stopt bij de standplaats alleen als daar geen andere sherut aanwezig is, anders rijdt de sherut door. Een sherut vertrekt van de standplaats zodra zeven passagiers ingestapt zijn.

- (a). Specificeer de toestand en het toestandsdiagram van een continue-tijds Markov keten om dit probleem te analyseren. Schrijf de vergelijkingen voor de evenwichtskansen op.
- (b). Wat is de kans dat een aankomende potentiële passagier niet blijft wachten en zich naar elders begeeft voor vervoer? Beargumenteer uw antwoord. Wat is het gemiddeld aantal wachtende passagiers en wat is de gemiddelde wachttijd van een passagier die meegaat met de sherut?

Opgave 4

Bij een benzinestation met 1 pomp en ruimte voor 5 auto's komen auto's die tanken willen langs volgens een Poisson proces met intensiteit λ . Een aankomende auto die i andere auto's bij het benzinestation aantreft, rijdt door naar een volgend station met een kans van $i/5$ en rijdt het tankstation binnen met kans $1 - i/5$. Slechts 1 auto tegelijk kan tanken en de tijd die een auto nodig heeft om te tanken is exponentieel verdeeld met verwachtingswaarde $1/\mu$.

- (a). Specificeer het toestandsdiagram en de evenwichtsvergelijkingen van een continue-tijds Markov keten analyse om de kansverdeling te berekenen van het aantal aanwezige auto's in het benzinestation.
- (b). Stel dat u de evenwichtskansen uit vraag (a) heeft berekend. Hoe vindt u vervolgens uit deze kansen de fractie auto's die doorrijden en de gemiddelde wachttijd per tankende auto?
- (c). Veronderstel dat elke automobilist die het terrein van het benzinestation oprijdt slechts bereid is een bepaalde tijd te wachten totdat de

pomp vrijkomt voor de automobilist. Deze “geduldtijd” is een trekking uit een exponentiele verdeling met verwachtingswaarde $1/\theta$ en is onafhankelijk voor de verschillende auto's. Als de geduldtijd van een automobilist verstreken is en de pomp is nog niet vrij dan rijdt de automobilist weg, ongeacht hoeveel auto's nog voor hem zijn. Stel voor deze nieuwe situatie het toestandsdiagram op en wat worden nu de evenwichtsvergelijkingen?

Opgave 5

- (a). Schepen die vertrekken uit Zuid-Amerika richting West-Europa zijn een stochastische tijd onderweg die normaal verdeeld is met verwachtingswaarde μ weken en een spreiding van σ weken. De vaartijden van de verschillende schepen worden onafhankelijk van elkaar verondersteld. De schepen vertrekken vanuit havens in Zuid-Amerika naar West-Europa volgens een Poisson proces met een gemiddelde van λ schepen per week. Wat is het gemiddeld aantal schepen dat op een gegeven moment van Zuid-Amerika naar West-Europa onderweg is? Wat is de kans dat op een gegeven moment meer dan 10 schepen van Zuid-Amerika naar West-Europa onderweg zijn? Beargumenteer uw antwoord.
- (b). Bananenboten uit Zuid-Amerika komen bij de haven van Vlissingen aan volgens een Poisson proces met een gemiddelde van λ per dag. Als een bananenboot niet direct in Vlissingen gelost kan worden, dan vaart het schip door naar de haven van Antwerpen. In de haven van Vlissingen is een beperkt aantal van N losinstallaties beschikbaar voor de bananenboten. Elke installatie kan slechts 1 schip tegelijk lossen en de lostijd van een schip is exponentieel verdeeld met een verwachtingswaarde van $1/\mu$ dagen. De lostijden van de verschillende schepen zijn onafhankelijk van elkaar. Leid de evenwichtsverdeling van het aantal bezette losinstallaties af. Specificeer daartoe het toestandsdiagram van een geschikt gekozen continue-tijds Markov keten en geef de details van de afleiding van de evenwichtsverdeling. Wat is de fractie schepen die doorvaart naar Antwerpen?
- (c). Voor de situatie uit vraag (b), veronderstel nu dat de lostijd van een schip met kans p gelijk is aan een vast aantal van D_1 dagen en met

kans $1 - p$ gelijk aan een vast aantal van D_2 dagen. Wat is nu de evenwichtsverdeling van het aantal bezette losinstallaties en wat is nu de fractie van het aantal schepen dat doorvaart naar Antwerpen? Beargumenteer uw antwoord.

Puntentelling (elke som 18 punten)

Som 1(a),(b) elk 9 punten.

Som 2(a),(b) elk 9 punten.

Som 3(a),(b) elk 9 punten.

Som 4(a),(b),(c) elk 6 punten.

Som 5(a),(b), elk 9
punten.

Tentamencijfer:

$$1 + \frac{\text{totale aantal punten}}{10}.$$