



Opgave 1

De schaker Boris Kasparov gaat opnieuw een tweestrijd aan met de schaakcomputer Deep Blue. Voor de eerste partij en na elke remisepartij geldt dat de volgende partij met kans 0.4 gewonnen wordt door Kasparov, met kans 0.3 door Deep Blue en met kans 0.3 in remise eindigt. Na een winstpartij van Kasparov hebben de kansen voor de uitslag van de volgende partij de respectievelijke waarden 0.5, 0.25 en 0.25, terwijl na een verliespartij van Kasparov de respectievelijke waarden van de kansen gelijk zijn aan 0.2, 0.6 en 0.2.

- Beschouw de situatie dat de match duurt totdat Kasparov of Deep Blue drie partijen achterelkaar gewonnen heeft. Stel een discrete-tijds Markov keten op om de kans te berekenen dat de match meer dan 15 partijen duurt. Geef duidelijk de betekenis aan van de door u gedefinieerde toestand. Laat op beargumenteerde wijze zien hoe u de gevraagde kans berekent.
- Voor de situatie uit vraag (a) laat zien hoe de verwachte duur van de match en de kans dat Kasparov eindwinnaar wordt, berekend kunnen worden.
- Veronderstel nu dat het niet gaat totdat drie partijen achterelkaar gewonnen zijn, maar dat Kasparov en Deep Blue tot in het oneindige tegen elkaar doorspelen. Stel een discrete-tijds Markov keten op voor de berekening van de fractie partijen die op de lange duur door Kasparov wordt gewonnen. Specificeer de vergelijkingen waarmee u deze kans kunt berekenen (u hoeft de vergelijkingen niet numeriek op te lossen).

Opgave 2

Beschouw het $M/G/\infty$ model met oneindig veel bedienden, waar klanten aankomen volgens een Poissonproces met parameter λ en de bedieningstijd B van een klant een algemene kansverdeling heeft met verwachtingswaarde $E(B)$. Voor dit model geldt het resultaat dat de limietverdeling van het aantal bezette bediendes een Poissonverdeling met verwachtingswaarde $\lambda E(B)$ is.

- Geef een probabilistisch bewijs afleiding van dit resultaat voor het speciale geval dat de bedieningstijd van een klant een constante D is (dus niet in de formule D invullen voor $E(B)$, maar een afleiding geven). Geef vervolgens een probabilistisch bewijs voor het geval dat de bedieningstijd van een klant met kans p_1 gelijk is aan de constante D_1 en met kans $p_2 = 1 - p_1$ gelijk aan de constante D_2 . Geef duidelijk aan welke eigenschappen van het Poisson proces u gebruikt.
- Beschouw een voorraadsysteem waarin de beginvoorraad van een bepaald product gelijk is aan S . Klanten voor dit product komen aan volgens een Poissonproces met parameter λ . Elke klant vraagt precies één eenheid. Het naleveringsmodel wordt beschouwd, d.w.z elke vraag van een klant wordt uiteindelijk vervuld oftewel een vraag die plaatvindt terwijl het systeem buiten voorraad is wordt nageleverd zodra voorraad beschikbaar is. De voorraad wordt bestuurd door een zogenaamde $(S - 1, S)$ regel. In het naleveringsmodel zegt deze regel dat na elke klantenvraag een aanvulorder van de grootte 1 wordt geplaatst bij de fabrikant. De levertijd van elke aanvulorder is een stochastische variabele $\tilde{B}$ met een gegeven verwachtingswaarde τ . Wat is de evenwichtsverdeling van het aantal uitstaande aanvulorders? Wat is de gemiddelde voorraad op de planken? Wat is de fractie vraag waaraan niet direct voldaan kan worden en die moet worden nageleverd? Geef duidelijk aan hoe u het $M/G/\infty$ model toepast om deze vragen te beantwoorden.

- (c). Beschouw opnieuw het voorraadsysteem uit de vorige vraag maar nu met lost-sales. In het lost-sales model gaat elke klantenvraag die optreedt terwijl het systeem buiten voorraad is verloren (de klant gaat naar elders) en wordt bij de fabrikant een aanvulorder ter grootte van 1 eenheid alleen geplaatst als daadwerkelijk de voorraad met 1 afneemt door een vervulde vraag van een klant. Welk wachttijdmodel is nu van toepassing op de vragen uit het vorige onderdeel? Beantwoord deze vragen vervolgens.

Opgave 3

In een haven met een onbeperkt aantal ligplaatsen komen schepen aan volgens een Poisson proces met parameter λ . Elk van de schepen moet gelost worden en daarvoor is slechts 1 losinstallatie beschikbaar. De losinstallatie kan aan slechts 1 schip tegelijk werken. De zuivere lostijd van een schip is exponentieel verdeeld met verwachtingswaarde $1/\mu$. Tijdens het lossen van een schip kan de losinstallatie door een storing getroffen worden. In dat geval wordt het lossen van het schip onderbroken en wordt weer hervat op het moment dat de storing verholpen is. De tijd dat de losinstallatie zonder storingen werkt is exponentieel verdeeld met verwachting $1/\alpha$, terwijl de tijd nodig om een storing te verhelpen een exponentiele verdeling met verwachting $1/\beta$ heeft. Voor alle duidelijkheid een losinstallatie kan niet door een storing getroffen worden als de installatie niet aan het werk is.

- Definieer de toestandvariabele(n) voor een passende continue-tijds Markov keten voor dit probleem en specificeer het toestandsdiagram en de infinitesimale transitie-intensiteiten.
- Specificeer het stelsel vergelijkingen waaraan de evenwichtskansen voldoen.
- Geef aan hoe uit de evenwichtskansen het gemiddeld aantal schepen in de haven en de gemiddelde verblijftijd van een schip in de haven berekend kunnen worden. Wat is de kans dat een aankomend schip meteen gelost kan worden?

Opgave 4

Beschouw het Erlang verliesmodel voor een call-center met c bedienden waarbij klanten aankomen volgens een Poisson proces met parameter λ . Een klant die bij aankomst alle bedienden bezet treft, wordt geweigerd en gaat verloren (de klant gaat naar elders). De bedieningstijd S van een klant veronderstellen we eerst exponentieel verdeeld met verwachtingswaarde $E(S) = 1/\mu$.

- Definieer een geschikte continue-tijds Markov keten voor dit probleem en geef een gedetailleerde afleiding van de evenwichtsverdeling van het aantal bezette bediendes. Wat is de formule voor de fractie klanten die geweigerd wordt?
- Veronderstel nu dat de bedieningstijd S van een klant met kans p gelijk is aan de constante D_1 en met kans $1 - p$ aan de constante D_2 . Wat is nu de formule voor de fractie klanten die geweigerd wordt? Beargumenteer uw antwoord.
- Stel nu dat bij het call-center twee typen klanten onafhankelijk van elkaar binnenkomen volgens twee Poisson processen met respectievelijk parameters λ_1 en λ_2 . De bedieningstijd van klanten van type 1 is exponentieel verdeeld met verwachting $1/\mu_1$ en van type 2 is exponentieel verdeeld met verwachting $1/\mu_2$. Wat is in dit geval de formule voor de fractie klanten die geweigerd wordt? Beargumenteer uw antwoord.

Opgave 5

Beschouw de $M/G/1$ wachtrij. In dit wachttijdmodel komen klanten aan volgens een Poisson proces met parameter λ , heeft de bedieningstijd B van een klant een algemene kansverdeling

met verwachtingswaarde $E(B)$ en variatiecoëfficiënt c_B , is er 1 bediende en is er een oneindige wachtruimte. De aanname is dat ρ gedefinieerd door $\rho = \lambda E(B)$ kleiner dan 1 is. In de beantwoording van de volgende vragen mag u de formule van Little gebruiken zonder deze formule zelf te bewijzen.

- (a). Beargumenteer dat de fractie tijd dat de bediende bezet is gelijk is aan ρ . Vervolgens beargumenteer dat de fractie aankomende klanten die wachten moeten ook gelijk is aan ρ .
- (b). Geef een heuristische afleiding van de formule $L_q = \frac{1}{2}(1 + c_B^2) \frac{\rho^2}{1-\rho}$, waarbij L_q gedefinieerd is het gemiddeld aantal wachtende klanten in de wachtrij (exclusief de klant in bediening). Aanwijzing: de wachttijdparadox stelt dat $\frac{1}{2}(1 + c_T^2)E(T)$ je gemiddelde wachttijd op de eerstkomende bus is als je op een random moment bij de bushalte aankomt en bussen vertrekken met onafhankelijke tussentijden die als T verdeeld zijn.

Puntentelling (elke som 18 punten)

Som 1(a), 8 punten (b),(c) elk 5 punten.

Som 2(a),(b),(c) elk 6 punten.

Som 3(a), 8 punten (b),(c) elk 5 punten.

Som 4(a), 8 punten (b),(c) elk 5 punten.

Som 5(a), 8 punten (b) 10 punten.

Tentamencijfer:

$$1 + \frac{\text{totale aantal punten}}{10}.$$