

TENTAMEN STOCHASTISCHE METHODEN voor BWI

24 mei 2004

Opgave 1 De dammers Jan Balk en Klaas Houtman spelen een serie dampartijen tegen elkaar. Voor de beginpartij en na elke remise geldt dat Balk de volgende partij wint met kans 0.4, Houtman de volgende partij wint met kans 0.3 en de volgende partij remise is met kans 0.3. Na een winspartij van Balk worden deze drie kansen gegeven door 0.5, 0.25 en 0.25, terwijl na een verliespartij van Balk deze kansen worden gegeven door 0.35, 0.45 en 0.20.

- (a). Beschouw eerst de situatie dat de dammers tegen elkaar spelen totdat één van de dammers drie opeenvolgende partijen gewonnen heeft. Laat zien hoe met een geschikt gekozen discrete-tijds Markovketen de kans kan worden berekend dat de wedstrijd meer dan 12 partijen nodig heeft. Specificeer duidelijk de toestand en de 1-stapsovergangskansen. Hoe kan de verwachtingswaarde worden berekend van het benodigde aantal partijen? Hoe berekenen je de kans dat Jan Balk eindwinnaar wordt?
- (b). Stel nu dat dag-in-dag-uit de dammers Balk en Houtman elke dag één partij tegen elkaar spelen. Hoe bereken je nu de fractie partijen die Balk op de lange duur wint en de fractie partijen op de lange duur die in remise eindigen? (nb: u hoeft de berekeningen van de getalwaarden niet daadwerkelijk uit te voeren).

Opgave 2

Beschouw het $M/G/\infty$ model met oneindig veel bedienden, waar klanten aankomen volgens een Poissonproces met parameter λ en de bedieningstijd S van een klant een algemene kansverdeling heeft met verwachtingswaarde $E(S)$.

- (a). Welk resultaat geldt voor de limietverdeling van het aantal bezette bediendes? Geef een afleiding van dit resultaat voor het geval de bedieningstijd van een klant een constante D is.

- (b). Geef vervolgens de afleiding van het resultaat als de bedieningstijd van een klant met kans p_1 gelijk is aan de constante D_1 en met kans $p_2 = 1 - p_1$ gelijk aan de constante D_2 .
- (c). In het pittoreske stadje Edam komen op zomerdagen bussen met toeristen aan volgens een Poisson proces met een gemiddelde van vijf bussen per uur. De tijd dat de bus in Edam blijft is normaal verdeeld met een verwachtingswaarde van drie kwartier en een spreiding van vijf minuten. Wat is de kansverdeling van het aantal bussen dat s' middags om vier uur in Edam aanwezig is? Voor de beantwoording van deze laatste vraag hebben we stilzwijgend aangenomen dat er onbeperkt veel parkeer ruimte voor bussen is. Stel nu eens dat er slechts parkeer ruimte is voor zeven toeristenbussen. Een bus die alle pakeerplaatsen bezet treft, blijft niet wachten maar rijdt door naar Volendam. Wat is nu het antwoord op de laatste vraag? Beargumenteer uw antwoord

Opgave 3

In een produktie/voorraad systeem komen produkten voor verkoop één voor één gereed met tussentijden die onafhankelijk zijn en exponentieel verdeeld met verwachtingswaarde $1/\alpha$. Zodra een eenheid produkt gereed is, wordt het op de planken gelegd voor verkoop. Klanten voor het produkt komen aan volgens een Poisson proces met parameter β . Er wordt verondersteld dat $\alpha > \beta$. Elke klant vraagt naar 1 eenheid produkt. Als het produkt voorradig is op de planken, dan neemt de klant één eenheid van het produkt mee; anders, gaat de klant naar elders voor het produkt (verloren vraag).

- (a). Specificeer het toestandsdiagram en de evenwichtsvergelijkingen van een continue-tijds Markov keten om de kansverdeling te berekenen van de voorraad op de planken.
- (b). Stel dat u de evenwichtskansen uit vraag (a) heeft berekend. Hoe vindt u vervolgens uit deze kansen de fractie vraag die verloren gaat en de gemiddelde hoeveelheid tijd dat een eenheid produkt op de planken ligt alvorens het verkocht wordt?
- (c). Veronderstel nu dat de voorraad op de planken aan bederf onderhevig is. De houdbaarheidsduur van elke eenheid heeft een exponentiele kansverdeling met verwachtingswaarde $1/\eta$, waarbij de houdbaarheidsduren van de eenheden onafhankelijk van elkaar zijn. Als de houdbaarheidsduur van een eenheid verstreken is, kan het niet meer verkocht worden en wordt het van de planken verwijderd. Hoe worden de antwoorden van de vragen (a) en (b) in dit geval?

Opgave 4

Bij een benzinestation met één pomp komen auto's die tanken willen langs volgens een Poisson proces met een gemiddelde van λ auto's per tijdeenheid. Een aankomende auto die reeds i andere auto's in het station ziet, rijdt het station binnen met kans $\frac{1}{i+1}$ en rijdt door naar een volgend benzinestation met kans $1 - \frac{1}{i+1}$. De tanktijd van een auto heeft een exponentiele kansverdeling met verwachtingswaarde $1/\mu$.

- (a). Definieer een continue-tijds Markov keten en het toestandsdiagram om de evenwichtsverdeling te berekenen van het aantal aanwezige auto's in het benzinestation. Specificeer de evenwichtsvergelijkingen. Is een expliciete oplossing mogelijk? Wat is deze dan?

- (b). Wat is het gemiddeld aantal auto's dat in de rij wacht tot het kan tanken? Wat is de fractie auto's die doorrijdt naar een volgend benzinestation? Wat is de gemiddelde tijd dat een auto die het benzinestation binnenrijdt moet wachten tot het kan tanken?

Opgave 5

Beschouw de $M/G/1$ wachtrij. In dit wachttijdmodel komen klanten aan volgens een Poisson proces met parameter λ , heeft de bedieningstijd B van een klant een algemene kansverdeling met verwachtingswaarde $E(B)$ en variatiecoëfficiënt c_B , is er 1 bediende en is er een oneindige wachtruimte. De aanname is dat $\rho = \lambda E(B)$ kleiner dan 1 is. In de beantwoording van de volgende vragen mag u de formule van Little gebruiken zonder deze formule zelf te bewijzen.

- (a). Beargumenteer dat de fractie tijd dat de bediende bezet is gelijk is aan ρ . Vervolgens beargumenteer dat de fractie aankomende klanten die wachten moeten ook gelijk is aan ρ .
- (b). Geef een heuristische afleiding van de formule $L_q = \frac{1}{2}(1 + c_B^2)\frac{\rho^2}{1-\rho}$, waarbij L_q gedefinieerd is het gemiddeld aantal wachtende klanten in de wachtrij (exclusief de klant in bediening). Aanwijzing: de wachttijdparadox stelt dat $\frac{1}{2}(1 + c_T^2)E(T)$ je gemiddelde wachttijd op de eerstkomende bus is als je op een random moment bij de bushalte aankomt en bussen vertrekken met onafhankelijke tussentijden die als T verdeeld zijn.

Puntentelling (elke som 18 punten)

Som 1(a),(b) elk 9 punten.

Som 2(a),(b), (c) elk 6 punten.

Som 3(a),(b),(c) elk 6 punten.

Som 4(a),(b) elk 9 punten.

Som 5(a), 8 punten (b) 10 punten.

Tentamencijfer:

$$1 + \frac{\text{totale aantal punten}}{10}.$$