



Opgave 1

- (a). Karate Kees is gespecialiseerd in het innen van achterstallige betalingen. Zijn opdrachtgevers komen uit kringen die buiten de reguliere kanalen hun geld willen innen. Kees onderscheidt twee soorten opdrachten: eenvoudige klussen (type 1) en lastige klussen (type 2). Opdrachten van de types 1 en 2 komen binnen volgens twee onafhankelijke Poisson processen met respectievelijke parameters λ_1 en λ_2 . Kees accepteert elke opdracht. Een opdracht van type i levert hem een vast bedrag van R_i op voor $i = 1, 2$. Op dit moment heeft Kees niets omhanden. Wat is de kansverdeling van de tijd ^{totdat} dat de eerstvolgende opdracht binnenkomt? Wat is de verwachte opbrengst voor Kees van de eerstvolgende opdracht?
- (b). Een simulatiestudie is uitgevoerd voor een tamelijk complex voorraadmodel. In dit voorraadmodel komen klanten aan volgens een Poisson proces met intensiteit λ en vraagt elke klant precies één eenheid van een bepaald product. De vraag van de klant gaat verloren als het systeem buiten voorraad is. In een simulatiestudie is gevonden dat op de lange duur de fractie tijd dat het systeem buiten voorraad is gelijk is aan 0.05, terwijl de gemiddelde voorraad op de planken gelijk is aan 25 eenheden. Op grond van deze informatie, beantwoord de volgende vragen: Wat is de fractie van de vraag die verloren gaat? Wat is de gemiddelde tijd dat een eenheid produkt in voorraad ligt op de planken? Beargumenteer uw antwoorden.

Opgave 2

- (a). Beschouw een experiment met drie mogelijke uitkomsten 1, 2 en 3 met respectievelijke kansen r_1, r_2, r_3 met $r_1 + r_2 + r_3 = 1$. Je doet onafhankelijke uitvoeringen van dit experiment totdat hetzij de uitkomst 1 en de uitkomst 2 beiden zijn opgetreden, hetzij de uitkomst 3 in totaal tweemaal is opgetreden. Wat is de kans dat meer dan tien uitvoeringen van het experiment nodig zijn? Wat is de kans dat de uitkomsten 1 en 2 optreden voordat de uitkomst 3 tweemaal optreedt? Definieer een geschikte discrete-tijds Markov keten en laat zien hoe de gevraagde kansen met deze Markov keten kunnen worden berekend. Geef duidelijk de betekenis van de door u gekozen toestand aan. Hoe berekent u de verwachtingswaarde van het benodigde aantal uitvoeringen van het experiment?
- (b). In een gokhal is een gokapparaat opgesteld dat zodanig afgesteld is dat een speler die een gegeven spel wint respectievelijk verliest het volgende spel wint met een kans van 0.25 respectievelijk 0.50. De speler moet bij elk spel 1 euro inzetten en krijgt 2.50 euro uitbetaald voor elk gewonnen spel. Bereken met een discrete-tijds Markov keten wat op de lange duur de gemiddelde winst per spel is voor de eigenaar van de gokhal.

Opgave 3

- (a). Schepen die vertrekken uit Zuid-Amerika richting West-Europa zijn een stochastische tijd onderweg die normaal verdeeld is met verwachtingswaarde μ weken en een spreiding van σ weken. De vaartijden van de verschillende schepen worden onafhankelijk van elkaar verondersteld. De schepen vertrekken vanuit havens in Zuid-Amerika naar West-Europa volgens een Poisson proces met een gemiddelde van λ schepen per week. Specificeer de kansverdeling van het aantal schepen dat op een willekeurig moment van Zuid-Amerika naar West-Europa onderweg is. Beargumenteer uw antwoord.

- (b). Bananenboten uit Zuid-Amerika komen bij de haven van Vlissingen aan volgens een Poisson proces met een gemiddelde van λ per dag. Als een bananenboot niet direct in Vlissingen gelost kan worden, dan vaart het schip door naar de haven van Antwerpen. In de haven van Vlissingen is een beperkt aantal van N losinstallaties beschikbaar voor de bananenboten. Elke installatie kan slechts 1 schip tegelijk lossen en de lostijd van een schip is exponentieel verdeeld met een verwachtingswaarde van $1/\mu$ dagen. De lostijden van de verschillende schepen zijn onafhankelijk van elkaar. Leid de evenwichtsverdeling van het aantal bezette losinstallaties af. Specificeer daartoe het toestandsdiagram van een geschikt gekozen continue-tijds Markov keten en geef de details van de afleiding van de evenwichtsverdeling. Wat is de fractie schepen die doorvaart naar Antwerpen?
- (c). Voor de situatie uit vraag (b), veronderstel nu dat de lostijd van een schip met kans p een exponentiele verdeling met een verwachtingswaarde van $1/\mu_1$ dagen heeft en met kans $1 - p$ een exponentiele verdeling met een verwachtingswaarde van $1/\mu_2$ dagen. Wat is nu de evenwichtsverdeling van het aantal bezette losinstallaties en wat is nu de fractie van het aantal schepen dat doorvaart naar Antwerpen?

Opgave 4

In een productie/voorraad systeem komen produkten voor verkoop één voor één gereed met tussentijden die onafhankelijk zijn en exponentieel verdeeld met verwachtingswaarde $1/\alpha$. Zodra een eenheid produkt gereed is, wordt het op de planken gelegd voor verkoop. Klanten voor het produkt komen aan volgens een Poisson proces met parameter β . Er wordt verondersteld dat $\alpha > \beta$. Elke klant vraagt naar 1 eenheid produkt. Als het produkt voorradig is op de planken, dan neemt de klant één eenheid van het produkt mee; anders, gaat de klant naar elders voor het produkt (verloren vraag).

- (a). Specificeer het toestandsdiagram en de evenwichtsvergelijkingen van een continue-tijds Markov keten om de kansverdeling te berekenen van de voorraad op de planken. Kunt u een expliciete oplossing geven voor de evenwichtskansen?
- (b). Stel dat u de evenwichtskansen uit vraag (a) heeft berekend. Hoe vindt u vervolgens uit deze kansen de fractie vraag die verloren gaat en de gemiddelde hoeveelheid tijd dat een eenheid produkt op de planken ligt alvorens het verkocht wordt?
- (c). Veronderstel nu dat elke klant 1 eenheid produkt vraagt met een gegeven kans r en 2 eenheden produkt met kans $1 - r$. Opnieuw gaat de totale vraag van de klant verloren als er geen voorraad op de planken is, terwijl de klant met 1 eenheid genoeg neemt als de vraag van de klant voor twee eenheden is en slechts 1 eenheid op de planken ligt. Hoe worden de antwoorden van de vragen (a) en (b) in dit geval (een expliciete oplossing voor de evenwichtskansen hoeft u niet te zoeken)?

Puntentoekenning

elke som 18 punten, cijfer voor schriftelijk deel is $1 + (\text{totale aantal behaalde punten})/8$

som 1(a), (b) elk 9 punten

som 2(a), (b) elk 9 punten

som 3(a), 7 punten, (b) 7 punten en (c) 4 punten

som 4(a),(b), (c) elk 6 punten