

TENTAMEN STOCHASTISCHE METHODEN VOOR BWI

26 mei 2003

Opgave 1

(a). Een simulatiestudie is uitgevoerd voor een tamelijk complex voorraadmodel. In dit voorraadmodel komen klanten aan volgens een Poisson proces met intensiteit λ en vraagt elke klant precies een eenheid van een bepaald product. De vraag van de klant gaat verloren als het systeem buiten voorraad is. In een simulatiestudie is gevonden dat op de lange duur de fractie tijd dat het systeem buiten voorraad is gelijk is aan 0.05, terwijl de gemiddelde voorraad op de planken gelijk is aan 25 eenheden. Op grond van deze informatie, beantwoord de volgende vragen: Wat is de fractie van de vraag die verloren gaat? Wat is de gemiddelde tijd dat een eenheid produkt in voorraad ligt op de planken? Beargumenteer uw antwoorden.

(b). Bij een informatiecentrale komen uit het binnenland telefonische verzoeken tot informatie binnen volgens een Poisson proces met een gemiddelde van λ_1 per minuut en, onafhankelijk daarvan, vanuit het buitenland volgens een Poisson proces met een gemiddelde van λ_2 per minuut. De afhandeltijd van een gespreksduur uit het binnenland is uniform verdeeld tussen de 2 en 4 minuten en de afhandeltijd van een gesprek uit het buitenland is uniform verdeeld tussen de 3 en 5 minuten. Wat is de kansverdeling van het totale aantal telefonische verzoeken dat het komende uur binnenkomt? Wat is de verwachte afhandeltijd van het eerstvolgend binnenkomend verzoek tot informatie? Licht uw antwoorden kort toe.

Opgave 2

De schaker Boris Kasparov gaat opnieuw een tweestrijd aan met de schaakcomputer Deep Blue. Voor de eerste partij en na elke remisepartij geldt dat de volgende partij met kans 0.4 gewonnen wordt door Kasparov, met kans 0.3 door Deep Blue en met kans 0.3 in remise eindigt. Na een winstpartij van Kasparov hebben de kansen voor de uitslag van de volgende partij de respectievelijke waarden 0.5, 0.25 en 0.25, terwijl na een verliespartij van Kasparov de respectievelijke waarden van de kansen gelijk zijn aan 0.2, 0.6 en 0.2.

(a). Beschouw de situatie dat de match duurt totdat Kasparov of Deep Blue drie partijen achterelkaar gewonnen heeft. Stel een discrete-tijds Markov keten op om de kans te berekenen dat de match meer dan 15 partijen duurt. Geef duidelijk de betekenis aan van de door u gedefinieerde toestand. Laat op beargumenteerde wijze zien hoe u de gevraagde kans berekent.

(b). Voor de situatie uit vraag (a) laat zien hoe de verwachte duur van de match en de kans dat Kasparov eindwinnaar wordt, berekend kunnen worden.

(c). Veronderstel nu dat het niet gaat totdat drie partijen achterelkaar gewonnen zijn, maar dat Kasparov en Deep Blue tot in het oneindige tegen elkaar doorspelen. Stel een discretetijds Markov keten op voor de berekening van de fractie partijen die op de lange duur door Kasparov wordt gewonnen. Specificeer de vergelijkingen waarmee u deze kans kunt berekenen (u hoeft de vergelijkingen niet numeriek op te lossen).

Opgave 3

(a). Op een gratis parkeerplaats met een capaciteit voor N auto's komen te parkeren auto's aan volgens een Poisson proces met een gemiddelde van λ auto's per tijdseenheid. Een auto die bij aankomst alle parkeerplaatsen betreft gaat naar de betaalde parkeergarage. De parkeertijd van een auto is exponentieel verdeeld met een verwachtingswaarde van $1/\mu$ tijdseenheden. Geef een gedetailleerde afleiding van de evenwichtsverdeling van het aantal aanwezige auto's op de gratis parkeerplaats. Welke fractie van de aankomende auto's gaat naar de betaalde parkeergarage?

(b). Voor de situatie uit vraag (a), veronderstel nu dat de parkeertijd van een auto een kansverdeling heeft die sterker variabel is dan de exponentiële verdeling maar wel dezelfde

verwachtingswaarde $1/\mu$ heeft. Gaat dan de waarde van de fractie auto's die naar de betaalde parkeergarage gaat omhoog? Beargumenteer uw antwoord.

(c). Wereldwijd bezien breken griep epidemieën uit volgens een Poisson proces met een gemiddelde van λ epidemieën per week. De duur van een griep epidemie is normaal verdeeld met een verwachtingswaarde van μ weken en een spreiding van σ weken. Wat is de kansverdeling van het aantal griep epidemieën dat op een gegeven moment in de wereld woedt. Beargumenteer uw antwoord.

Opgave 4

Bij een benzinestation met 1 pomp en ruimte voor 5 auto's komen auto's die tanken willen langs volgens een Poisson proces met intensiteit λ . Een aankomende auto die i andere auto's bij het benzinestation aantreft, rijdt door met een kans $i/5$ en rijdt het tankstation binnen met kans $1 - i/5$. Slechts 1 auto tegelijk kan tanken en de tijd die een auto nodig heeft om te tanken is exponentieel verdeeld met verwachtingswaarde $1/\mu$.

(a). Specificeer het toestandsdiagram en de evenwichtsvergelijkingen van een continue-tijds Markov keten analyse om de kansverdeling te berekenen van het aantal aanwezige auto's bij het benzinestation.

(b). Stel dat u de evenwichtskansen uit vraag (a) heeft berekend. Hoe vindt u vervolgens uit deze kansen de fractie auto's die doorrijden en de gemiddelde wachttijd per tankende auto?

(c). Veronderstel dat elke automobilist die het terrein van het benzinestation oprijdt slechts bereid is een bepaalde tijd te wachten totdat de pomp vrijkomt voor de automobilist. Deze "geduldtijd" is een trekking uit een exponentiele verdeling met verwachtingswaarde $1/\theta$ en is onafhankelijk voor de verschillende auto's. Als de geduldtijd van een automobilist verstreken is en de pomp is nog niet vrij dan rijdt de automobilist weg, ongeacht hoeveel auto's nog voor hem zijn. Stel voor deze nieuwe situatie het toestandsdiagram op. Wat is—in termen van de evenwichtskansen van de nieuwe continue-tijds Markov keten—het gemiddeld aantal auto's dat per tijdseenheid het terrein van het benzinestation afrijdt zonder getankt te hebben?

Puntentoekenning

elke som 18 punten, cijfer voor schriftelijk deel is $1 + (\text{totale aantal behaalde punten})/8$

som 1(a), (b) elk 9 punten

som 2(a), 7 punten, (b) 4 punten en (c) 7 punten

som 3(a), 7 punten, (b) 4 punten en (c) 7 punten

som 4(a),(b), (c) elk 6 punten