uitwerking tentamen 26 mei 2003.
Antwoorden NIET gecorrigeerd door Tijms, gebruik op eigen risico!

1a - fractie vraag die verloren gaat $\overset{PASTA}{=}$ fractie systeem buiten voorraad = 0.05
- gem. voorraad 25, gem vraag λ => $\frac{25}{\lambda}$

b $\text{poisson}(\lambda_1) + \text{poisson}(\lambda_2) = \text{poisson}(\lambda_1+\lambda_2)$, dit is per minuut. Dus per uur => $\text{poisson}((\lambda_1+\lambda_2)60)$.

verwachte afhandeltijd:
$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\cdot\frac{2+4}{2}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\cdot\frac{3+5}{2} =$$

fractie binnenland * E(tijd binn.) + fractie buit * E(tijd buit)

2 X_n = toestand na de n-de partij.

mogelijke toestanden:
0 : begin partij of laatste partij remise
b_1 : boris heeft laatste partij gewonnen maar niet die ervoor
d_1 : deep blue " " " " " " " "
b_2 : boris heeft laatste 2 partijen gewonnen
d_2 : deep blue " " " "

1-staps overgangskansen p_{ij}

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ b_1 \\ d_1 \\ b_2 \\ d_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & b_1 & d_1 & b_2 & d_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$P(\text{match} > 15 \text{ partijen}) = P(\text{na 15 keer toestand } b_2 \text{ of } d_2 \text{ niet bereikt}) = P(X_{15} \neq b_2 \text{ of } d_2 \mid X_0 = 0) =$
$1 - P(X_{15} = b_2 \mid X_0 = 0) - P(X_{15} = d_2 \mid X_0 = 0) = 1 - P^{15}_{0,b_2} - P^{15}_{0,d_2}$

P^{15} berekenen door matrix vermenigvuldiging

b verwachte duur match:
parametriseer naar begin toestand:
$u_s \overset{def}{=}$ verwachte resterende duur van de match als de huidige situatie door toestand s beschreven wordt.

verwachte duur van het spel is dan u_0

$u_0 = 1 + 0.4 u_{b_1} + 0.3 u_{d_1} + 0.3 u_0$
$u_{b_1} = 1 + 0.5 u_{b_2} + 0.25 u_{d_1} + 0.25 u_0$
$u_{d_1} = 1 + 0.2 u_{b_1} + 0.6 u_{d_2} + 0.2 u_0$
$u_{b_2} = 0 \quad u_{d_2} = 0$

$u_{d_1} = 1 + 0.2 u_{b_1} + 0 + 0.2 u_0$
$u_{b_1} = 1 + 0 + 0.25(1 + 0.2 u_{b_1} + 0.2 u_0) + 0.25 u_0 =$
$1{,}25 + 0.05 u_{b_1} + 0{,}3 u_0$
$u_{b_1} \cdot 0{,}95 = 1{,}25 + 0.3 u_0 \qquad u_{b_1} \approx 1{,}32 + 0.32 u_0$
$u_0 = 1 + 0.4(1{,}32 + 0.32 u_0) + 0.3(1 + 0{,}2[1{,}32 + 0.32 u_0] + 0.2 u_0) + 0.3 u_0$

$u_0 = 1 + 0{,}53 + 0{,}13 u_0 + 0.3 + 0.08 + 0.02 u_0 + 0.06 u_0 + 0{,}3 u_0$
$u_0 = 1{,}91 + 0{,}51 u_0 \quad \Rightarrow u_0 = 3{,}90$

Kans dat kasparov eindwinnaar wordt:
$P_s \overset{def}{=}$ kans dat kasparov eindwinnaar wordt vanuit de huidige situatie die door toestand s beschreven wordt.
Zoek P_0
$P_0 = 0.4 P_{b_1} + 0.3 P_{d_1} + 0.3 P_0$
$P_{b_1} = 0.5 P_{b_2} + 0.25 P_{d_1} + 0.25 P_0$
$P_{d_1} = 0.2 P_{b_1} + 0.6 P_{d_2} + 0.2 P_0$
$P_{b_2} = 1 \quad P_{d_2} = 0$

$P_{d1} = 0.2 P_{b1} + 0 + 0.2 P_o$

$P_{b1} = 0.5 + 0.25(0.2 P_{b1} + 0.2 P_o) + 0.25 P_o = 0.5 + 0.05 P_{b1} + 0.30 P_o$

$P_{b1} \approx 0.53 + 0.32 P_o$

$P_o = 0.4(0.53 + 0.32 P_o) + 0.3(0.2[0.53 + 0.32 P_o] + 0.2 P_o) + 0.3 P_o$

$P_o \approx 0.25 + 0.51 P_o \quad \Rightarrow P_o \approx 0.51$

c X_n : toestand na de n-de partij

mogelijke toestanden:

o : begin partij of laatste partij remise

b : boris heeft laatste partij gewonnen

d : deep blue heeft laatste partij gewonnen

def. $\pi_j = \sum_{k \in I} \pi_k p_{kj}$

$$\begin{array}{c|c}
\text{van/naar} & \begin{array}{ccc} o & b & d \end{array} \\
\begin{array}{c} o \\ b \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$\pi_o = 0.3\pi_o + 0.25\pi_b + 0.2\pi_d$

$\pi_b = 0.4\pi_o + 0.5\pi_b + 0.2\pi_d$

$\pi_d = 0.3\pi_o + 0.25\pi_b + 0.6\pi_d$

fractie partijen die op de lange duur door kasparov gewonnen worden $= \pi_b$

3a Kunt het zien als erlang verliesmodel:

parkeerplaatsen = bedienden $c = N$

auto's = klanten $\lambda = \lambda$

parkeertijd = bedieningstijd $\mu = \mu$

dan $p_i = \dfrac{(\lambda/\mu)^i/i!}{\sum_{k=0}^{N} (\lambda/\mu)^k/k!}$ voor $i = 0, 1, \ldots N$

fractie aankomende auto's dat naar de betaalde parkeergarage gaat = fractie tijd dat de ~~garage niet~~ gratis parkeerplaats vol is = p_N (PASTA)

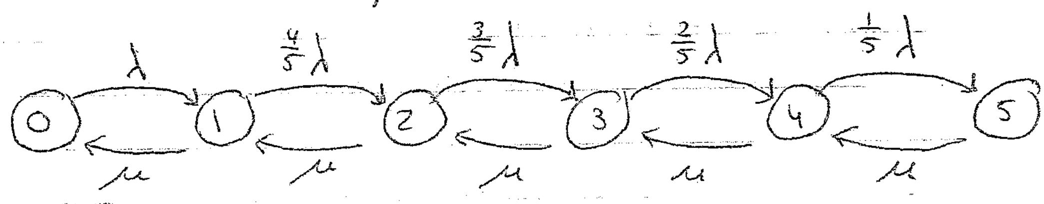
b nee die blijft gelijk want p_i is alleen afhankelijk van de verwachting v/d parkeertijd en niet van de variantie

c Dit kun je zien als een $M|G|\infty$ - model

dan: $p_j = e^{-\lambda E(B)} \dfrac{[\lambda E(B)]^j}{j!} = e^{-\lambda/\mu} \cdot \dfrac{(\lambda/\mu)^j}{j!}$

4 $X(t)$: aantal auto's bij de pomp op tijdstip t

$X(t) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$



$\lambda p_0 = \mu p_1$

$[\mu + \lambda(1 - \frac{i}{5})] p_i = \lambda(1 - \frac{i-1}{5}) p_{i-1} + \mu p_{i+1}$ $i = 1, 2, 3, 4$

$\frac{1}{5} \lambda p_4 = \mu p_5$

b fractie auto's die doorrijden $= \sum_{i=0}^{5} \frac{i}{5} p_i$

gemiddelde wachttijd per tankende auto: $(M|M|c|c+N)$

$W_q = L_q/\lambda = \sum_{j=1}^{5} \dfrac{(j-1) p_j}{\lambda_j}$

$\lambda_j = \lambda \cdot (1 - \frac{j}{5})$

4 c

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu+\theta"] \arrow[r, bend left, "\frac{4}{5}\lambda"] & 2 \arrow[l, bend left, "\mu+2\theta"] \arrow[r, bend left, "\frac{3}{5}\lambda"] & 3 \arrow[l, bend left, "\mu+3\theta"] \arrow[r, bend left, "\frac{2}{5}\lambda"] & 4 \arrow[l, bend left, "\mu+4\theta"] \arrow[r, bend left, "\frac{1}{5}\lambda"] & 5 \arrow[l, bend left, "\mu+5\theta"]
\end{tikzcd}$$

want $\exp(\mu) + \exp(\theta) = \exp(\mu+\theta)$

gemiddeld aantal auto's dat per tydseenheid het terrein van het benzinestation afrydt zonder getankt te hebben $= \sum_{i=0}^{5} p_i \frac{i\theta}{(\mu+i\theta)}$