

TENTAMEN STOCHASTISCHE METHODEN voor BWI

13 augustus 2002, 13.30 – 16.30 uur

Opgave 1

- (a). Je gooit met een dobbelsteen net zo lang totdat je elk van de zes mogelijke uitkomsten gegooit hebt. Laat zien hoe met een discrete-tijds Markovketen de kans kan worden berekend dat je meer dan L worpen nodig hebt. (Aanwijzing: neem een Markovketen met zes toestanden waarbij de toestand aangeeft hoeveel van de zes mogelijke uitkomsten je al geworpen hebt.) Specificeer de 1-staps overgangskansen en geef de formule voor de gevraagde kans.
- (b). Een gokapparaat is zo afgesteld dat een speler die een gegeven spel wint (verliest) het volgende spel zal winnen met kans 0.25 (0.5). De speler zet \$ 1 per spel in en krijgt \$ 2.50 uitbetaald voor een gewonnen spel. Ga met Markovanalyse na wat op de lange duur de gemiddelde opbrengst per spel is voor de gokbaas.

Opgave 2

Beschouw het $M/G/\infty$ model met oneindig veel bedienden, waar klanten aankomen volgens een Poissonproces met parameter λ en de bedieningstijd S van een klant een algemene kansverdeling heeft met verwachtingswaarde $E(S)$. Voor dit model geldt het resultaat dat de limietverdeling van het aantal bezette bediendes een Poissonverdeling met verwachtingswaarde $\lambda E(S)$ is.

- (a). Geef een beargumenteerde afleiding van dit resultaat voor het geval de bedieningstijd van een klant een constante D is.
- (b). Geef vervolgens de afleiding van het resultaat als van een klant de bedieningstijd met kans p_1 gelijk is aan de constante D_1 en met kans $p_2 = 1 - p_1$ gelijk aan de constante D_2 . Beargumenteer uw afleiding!
- (c). Beschouw een voorraadsysteem waarin de beginvoorraad van een bepaald product gelijk is aan R . Klanten voor dit product komen aan volgens een Poissonproces met parameter λ . Elke klant vraagt precies één eenheid. Na elke klantenvraag wordt bij de fabrikant een aanvulorder van de grootte 1 geplaatst. De levertijd van elke aanvulorder is een stochastische variabele S met een gegeven verwachtingswaarde τ . Een klantenvraag die optreedt als de voorraad op de planken nul is, leidt ook tot een aanvulorder en aan deze vraag wordt dan voldaan zodra de aanvulorder binnen is. Wat is de evenwichtsverdeling van het aantal uitstaande aanvulorders? Wat is de gemiddelde voorraad op de planken? Wat is de fractie vraag waaraan niet direct voldaan kan worden en die moet worden nageleverd? Wat is de gemiddelde tijd dat een eenheid voorraad op de planken ligt?

Opgave 3

Bij een parkeerterrein met plaats voor N auto's komen parkeerders aan volgens een Poissonproces met intensiteit λ . Een aankomende auto die alle parkeerplaatsen bezet treft, gaat naar elders. De parkeertijd van een auto is exponentieel verdeeld met parameter μ .

- (a). Stel een continue-tijds Markovketen op om dit probleem te analyseren en leid een formule af voor de evenwichtsverdeling van het aantal bezette parkeerplaatsen. Wat is de fractie van het aantal aankomende auto's dat alle plaatsen bezet treft?
- (b). Beschouw nu de situatie dat zowel langparkeerders als kortparkeerders aankomen. De langparkeerders komen aan volgens een Poissonproces met een gemiddelde van 10 auto's per uur en de kortparkeerders volgens een Poissonproces met een gemiddelde van 20 auto's per uur. De parkeertijd van een langparkeerder is lognormaal verdeeld met een verwachtingswaarde van 50 minuten en een spreiding van 40 minuten en die van een kortparkeerder is lognormaal met een verwachtingswaarde van 20 minuten en een spreiding van 10 minuten. Wat is de formule voor de fractie auto's die bij aankomst alle plaatsen bezet treft? Beargumenteer uw antwoord!

Opgave 4

Bij het treinstation van Juinen staat het éénmans taxibedrijf Jacobse. Potentiële passagiers komen bij de taxihalte aan volgens een Poissonproces met parameter λ . Als de taxi er staat, dan rijdt deze meteen weg zodra er een klant is. Als er geen taxi staat, dan blijft de passagier wachten mits er al niet meer dan twee andere klanten staan te wachten. Ingeval er al drie klanten staan te wachten, dan regelt een nieuw aankomende potentiële klant alternatief vervoer. Als de taxi terugkeert bij het station en er staan klanten te wachten, dan vertrekt de taxi meteen weer met alle wachtenden klanten. Anders blijft de taxi bij de halte staan. De tijd die de taxi nodig heeft om bij het station terug te keren, heeft een exponentiële verdeling met verwachtingswaarde $1/\mu$ ongeacht het aantal klanten dat in de rit vervoerd wordt.

- (a). Specificeer de toestand en het toestandsdiagram van een continue-tijds Markovketen om de situatie te analyseren.
- (b). Geef de evenwichtsvergelijkingen.
- (c). Wat is de gemiddelde wachttijd van een klant die meegaat en wat is de fractie potentiële klanten die elders vervoer regelt?

Opgave 5

Beschouw een tandem wachtrij met twee bewerkingsstations 1 en 2 in serie. Eenheden ruw materiaal komen aan bij station 1 volgens een Poissonproces met parameter λ . Na een eerste bewerking bij station 1 gaat de eenheid materiaal door naar station 2 voor de volgende bewerking. Als de bewerking van station 2 gedaan is, dan is er een gegeven kans p dat beide bewerkingen overnieuw moeten gebeuren en in dat geval gaat de eenheid weer terug naar station 1 en sluit zich achter in de rij aan. Is de bewerking in orde, dan verlaat de eenheid het systeem. Elk station kan slechts één eenheid tegelijk in bewerking hebben.

De bewerkingstijd bij station i is exponentieel verdeeld met verwachtingswaarde $1/\mu_i$ voor $i = 1, 2$.

- (a). Voor dit netwerk van wachtrijen, specificeer de verkeersvergelijkingen en los deze op.
- (b). Wat is de simultane evenwichtsverdeling van het aantal eenheden dat bij stations 1 en 2 aanwezig is? (U hoeft alleen de formules te geven, niet de afleiding.)
- (c). Wat is de gemiddelde verblijftijd van een nieuw aankomende eenheid in het systeem?

Puntentelling (elke som 18 punten)

Som 1(a),(b) elk 9 punten.

Som 2(a),(b) elk 9 punten.

Som 3(a),(b) elk 9 punten.

Som 4(a),(b),(c) elk 6 punten.

Som 5(a),(b),(c) elk 6 punten.

Tentamencijfer:

$$1 + \frac{\text{totale aantal punten}}{10}.$$