

TENTAMEN STOCHASTISCHE METHODEN voor BWI

7 juni 2002, 13.30 – 16.30 uur

Opgave 1

Twee schakers die even sterk zijn, spelen een wedstrijd tegen elkaar totdat één van de schakers drie opeenvolgende partijen gewonnen heeft. Elke partij leidt tot winst voor één van de twee, of tot remise. De uitslagen van de verschillende partijen zijn onafhankelijk van elkaar. Bij de twee betreffende schakers is de kans dat een gegeven partij in remise eindigt gelijk r_0 .

- (a). Laat zien hoe met een geschikt gekozen discrete-tijds Markovketen de kans kan worden berekend dat de wedstrijd meer dan L partijen nodig heeft. Specificeer duidelijk de toestand en de 1-stapsovergangskansen.
- (b). Laat zien hoe de verwachtingswaarde kan worden berekend van het benodigde aantal partijen.
- (c). Hoe moet de toestand en de 1-stapsovergangskansen uit vraag (a) worden aangepast als de schakers niet even sterk zijn, maar schaker 1 met kans p_1 een gegeven partij wint, en schaker 2 met kans p_2 , waarbij $r_0 + p_1 + p_2 = 1$?

Opgave 2

Beschouw het $M/G/\infty$ model met oneindig veel bedienden, waar klanten aankomen volgens een Poissonproces met parameter λ en de bedieningstijd S van een klant een algemene kansverdeling heeft met verwachtingswaarde $E(S)$. Voor dit model geldt het resultaat dat de limietverdeling van het aantal bezette bediendes een Poissonverdeling met verwachtingswaarde $\lambda E(S)$ is.

- (a). Geef een afleiding van dit resultaat voor het geval de bedieningstijd van een klant een constante D is.
- (b). Geef vervolgens de afleiding van het resultaat als van een klant de bedieningstijd met kans p_1 gelijk is aan de constante D_1 en met kans $p_2 = 1 - p_1$ gelijk aan de constante D_2 .
- (c). Beschouw een voorraadstelsel waarin de beginvoorraad van een bepaald product gelijk is aan R . Klanten voor dit product komen aan volgens een Poissonproces met parameter λ . Elke klant vraagt precies één eenheid. Na elke klantenvraag wordt bij de fabrikant een aanvulorder van de grootte 1 geplaatst. De levertijd van elke aanvulorder is een stochastische variabele S met een gegeven verwachtingswaarde τ . Een klantenvraag die optreedt als de voorraad op de planken nul is, leidt ook tot een aanvulorder en aan deze vraag wordt dan voldaan zodra de aanvulorder binnen is. Wat is de evenwichtsverdeling van het aantal uitstaande aanvulorders? Wat is de gemiddelde voorraad op de planken? Wat is de fractie vraag waaraan niet direct voldaan kan worden en die moet worden nageleverd?



Opgave 3

Een informatiecentrum verstrekt informatie in twee talen. Verzoeken tot informatie komen telefonisch binnen. Er zijn c tweetalige informatrices om de aankomende verzoeken te behandelen. Verzoeken van major-talige klanten komen binnen volgens een Poissonproces met parameter λ_1 , en, onafhankelijk daarvan, verzoeken van minor-talige klanten volgens een Poissonproces met parameter λ_2 . Een aankomend verzoek dat alle c informatrices bezet treft, gaat verloren. De afhandeltijd van een major-talig verzoek heeft een lognormale verdeling met verwachtingswaarde α_1 en spreiding σ_1 , terwijl voor een minor-talig verzoek de afhandeltijd lognormaal verdeeld is met verwachtingswaarde α_2 en spreiding σ_2 .

- (a). Welk verliesmodel uit de wachttijdtheorie is op bovenstaande situatie van toepassing? Wat is in dit betreffende verliesmodel de formule voor de verlieskans?
- (b). Specificeer voor het bovenstaande probleem van het informatiecentrum de parameters die u in de formule voor de verlieskans nodig heeft.

Opgave 4

Bij het treinstation van Juinen staat het éénmans taxibedrijf Jacobse. Potentiële passagiers komen bij de taxihalte aan volgens een Poissonproces met parameter λ . Als de taxi er staat, dan rijdt deze meteen weg zodra er een klant is. Als er geen taxi staat, dan blijft de passagier wachten mits er al niet meer dan twee andere klanten staan te wachten. Ingeval er al drie klanten staan te wachten, dan regelt een nieuw aankomende potentiële klant alternatief vervoer. Als de taxi terugkeert bij het station en er staan klanten te wachten, dan vertrekt de taxi meteen weer met alle wachtenden klanten. Anders blijft de taxi bij de halte staan. De tijd die de taxi nodig heeft om bij het station terug te keren, heeft een exponentiële verdeling met verwachtingswaarde $1/\mu$ ongeacht het aantal klanten dat in de rit vervoerd wordt.

- (a). Specificeer de toestand en het toestandsdiagram van een continue-tijds Markovketen om de situatie te analyseren.
- (b). Geef de evenwichtsvergelijkingen.
- (c). Wat is de gemiddelde wachttijd van een klant die meegaat en wat is de fractie potentiële klanten die elders vervoer regelt?

Opgave 5

Beschouw een tandem wachtrij met twee bewerkingsstations 1 en 2 in serie. Eenheden ruw materiaal komen aan bij station 1 volgens een Poissonproces met parameter λ . Na een eerste bewerking bij station 1 gaat de eenheid materiaal door naar station 2 voor de volgende bewerking. Als de bewerking van station 2 gedaan is, dan is er een gegeven kans p dat beide bewerkingen overnieuw moeten gebeuren en in dat geval gaat de eenheid weer terug naar station 1 en sluit zich achter in de rij aan. Is de bewerking in orde, dan verlaat de eenheid het systeem. Elk station kan slechts één eenheid tegelijk in bewerking hebben. De bewerkingstijd bij station i is exponentieel verdeeld met verwachtingswaarde $1/\mu_i$ voor $i = 1, 2$.



- (a). Voor dit netwerk van wachtrijen, specificeer de verkeersvergelijkingen en los deze op.
- (b). Wat is de simultane evenwichtsverdeling van het aantal eenheden dat bij stations 1 en 2 aanwezig is? (U hoeft alleen de formule te geven, niet de afleiding.)
- (c). Wat is de gemiddelde verblijftijd van een nieuw aankomende eenheid in het systeem?

Puntentelling (elke som 18 punten)

Som 1(a),(b),(c) elk 6 punten.

Som 2(a),(b) elk 9 punten.

Som 3(a),(b),(c) elk 6 punten.

Som 4(a),(b),(c) elk 6 punten.

Som 5(a),(b),(c) elk 6 punten.

Tentamencijfer:

$$1 + \frac{\text{totale aantal punten}}{10}.$$

