

**Tentamen Stochastische Methode voor BWI,
dinsdag 27 maart 2001, 13.30-16.30 uur.**

1. Op een uitgestrekt opslagterrein in de haven worden speciale containers tijdelijk opgeslagen. Aan het eind van elke dag wordt één nieuwe container aangevoerd. Elke container verblijft een stochastische tijd op de opslagplaats. De verblijftijden van de verschillende containers zijn onafhankelijk van elkaar. Veronderstel eerst dat de verblijftijd van een container op de opslagplaats een exponentiële kansverdeling heeft met een verwachtingswaarde van $1/\mu$ dagen.
 - (a) Definieer een geschikte Markov-keten en specificeer de één-stapsovergangskansen van de Markov-keten.
 - (b) Wat is de algemene vorm van het stelsel evenwichtsvergelijkingen voor een discrete-tijds Markov-keten en welke interpretatie heeft de evenwichtskans als lange-duur gemiddelde in dit specifieke voorbeeld?
 - (c) Beantwoord vraag (a) opnieuw voor het geval dat de verblijftijd van een container op de opslagplaats met kans p exponentieel verdeeld is met een verwachtingswaarde van $1/\mu_1$ dagen en met kans $1-p$ exponentieel verdeeld is met een verwachtingswaarde van $1/\mu_2$ dagen.
2. In een haven met een onbeperkt aantal ligplaatsen komen schepen aan volgens een Poisson proces met parameter λ . Elk van de schepen moet gelost worden en daarvoor is slechts één losinstallatie ter beschikking. De losinstallatie kan niet aan meer dan 1 schip tegelijk werken. De lostijd per schip is exponentieel verdeeld met een verwachting $1/\mu$. Tijdens het lossen van ene schip kan de losinstallatie door een storing getroffen worden en het lossen van een schip wordt dan stilgelegd totdat de storing is verholpen (de losinstallatie kan niet stukgaan als deze niet bezig is met lossen van een schip). De tijd dat de losinstallatie zonder storingen werkt is exponentieel verdeeld met verwachting $1/\alpha$ terwijl de tijd nodig om een storing te verhelpen exponentieel verdeeld is met verwachting $1/\beta$.
 - (a) Definieer een geschikte continue-tijds Markov-keten om dit probleem te analyseren, waarbij u het toestandsdiagram en de transitie-intensiteiten op precieze wijze specificeert.
 - (b) Laat zien hoe de evenwichtsverdeling van de continue-tijds Markov-keten berekend kan worden.
 - (c) Laat zien hoe uit de evenwichtsverdeling het gemiddeld aantal schepen in de haven en de gemiddelde verblijftijd per schip berekend kunnen worden. Wat is de kans dat een aankomend schip meteen gelost kan worden?
3. Beschouw het Erlang verliesmodel met c bediendes waarbij klanten aankomen volgens een Poisson proces met parameter λ . Een aankomende klant die alle c bediendes bezet treft, wordt geweigerd en gaat verloren. De bedieningstijd S

van de klant wordt in eerste instantie verondersteld een exponentiële kansverdeling te hebben met verwachtingswaarde $E(S) = 1/\mu$

- (a) Definieer een geschikte continue-tijds Markov-keten en geef de afleiding van de evenwichtsverdeling van het aantal bezette bediendes. Wat is de fractie aankomende klanten die geweigerd worden?
 - (b) Stel nu dat de bedieningstijd S van een klant met kans p exponentieel verdeeld is met verwachtingswaarde $1/\mu_1$ en met kans $1-p$ exponentieel verdeeld is met verwachtingswaarde $1/\mu_2$. Wat is nu de fractie aankomende klanten die geweigerd wordt?
 - (c) Stel nu dat twee typen klanten onafhankelijk van elkaar bij een callcenter binnenkomen volgens Poisson processen met respectievelijke parameters λ_1 en λ_2 . De bedieningstijd van type i klant heeft een uniforme verdeling op $[a_i, b_i]$ voor $i=1,2$. Er zijn c afhandelaars en elke afhandelaar kan beide type klanten helpen. Een klant die bij aankomst alle afhandelaars bezet treft, gaat verloren. Wat is nu de fractie aankomende klanten die verloren gaat?
4. Beschouw een open netwerk van K bedieningsstations $j = 1, \dots, K$, waarbij het externe aankomstproces van klanten bij station j een Poisson proces is met parameter r_j . Elk station heeft één bediende en de bedieningstijd bij station j is exponentieel verdeeld met verwachtingswaarde $1/\mu_j$. Een klant die bediend is bij station i gaat vervolgens naar station j met kans p_{ij} of verlaat het systeem met kans $p_{io} = 1 - \sum_{j=1}^K p_{ij}$.
- (a) Stel de verkeersvergelijkingen voor dit systeem op en geef een beargumenteerde afleiding.
 - (b) Wat is de simultane evenwichtsverdeling van de aantallen klanten aanwezig bij de verschillende stations? U hoeft deze verdeling niet af te leiden maar u wordt wel gevraagd een heuristische toelichting te geven.
 - (c) Wat is de relatie tussen het gemiddelde totaal aantal klanten in het systeem en de gemiddelde verblijftijd van een nieuw aankomende klant in het systeem?

Puntentoekenning (elke som is 18 punten)

Som 1(a), 1(b) en 1(c), elk 6 punten

Som 2(a), 2(b) en 2(c), elk 6 punten

Som 3(a), 9 punten, 3(b) 3 punten en 3(c) 6 punten

Som 4(a), 4(b), 4(c), elk 6 punten

Cijfer voor schriftelijk : 1 + aantal punten gedeeld door 4
