

Tentamen Stochastische Methoden voor BWI, 5 januari 2001

1. Beschouw het Erlang verliesmodel dat haar oorsprong heeft in het volgende probleem. Bij een telefooncentrale met c lijnen komen gesprekken binnen volgens een Poisson proces met parameter λ . Een aankomend gesprek dat alle lijnen bezet treft, gaat verloren en heeft geen verdere invloed op het systeem. Een geaccepteerd gesprek houdt een lijn bezet gedurende een exponentieel verdeelde tijd met verwachtingswaarde $1/\mu$. Het doel is het stochastische proces te analyseren dat het aantal bezette lijnen beschrijft.

(a) Definieer een continue-tijds Markov keten en zet het toestandsdiagram op.

(b) Bepaal de evenwichtsverdeling van het aantal bezette lijnen.

(c) Geef een formule voor de fractie aankomende gesprekken dat verloren gaat. Beargumenteer deze formule. Wat gebeurt er met deze formule als de gespreksduur een algemene kansverdeling met verwachtingswaarde $1/\mu$ heeft?

(d) Stel nu dat onafhankelijk van elkaar twee types gesprekken aankomen, waarbij gesprekken van type i aankomen volgens een Poisson proces met parameter λ_i en een geaccepteerd gesprek van type i een lijn bezet houdt gedurende een tijd die uniform verdeeld is op $[a_i, b_i]$ voor $i = 1, 2$. Wat is nu de fractie gesprekken dat verloren gaat?

2. Beschouw een elektronisch systeem met c identieke componenten. De looptijden van de componenten zijn onafhankelijk van elkaar en hebben elk een exponentiële verdeling met verwachtingswaarde $1/\alpha$. Voor de reparatie van kapotte componenten is slechts één reparateur ter beschikking en deze kan slechts één component tegelijk repareren. De reparatietijden van de kapotte componenten zijn onafhankelijk van elkaar en hebben eenzelfde exponentiële kansverdeling met verwachtingswaarde $1/\beta$. Het systeem als geheel werkt zolang tenminste één component werkende is en anders is het systeem down.

(a) Beschouw het speciale geval van $c = 2$ componenten. Stel dat op tijdstip 0 beide componenten werken. Bereken met de wet van voorwaardelijke verwachtingen de verwachtingswaarde van de tijd tot het systeem voor het eerst down gaat.

(b) Analyseer voor het algemene geval met c componenten het stochastische proces dat het aantal werkende componenten beschrijft. Wat voor proces is dit? Stel het toestandsdiagram op en bepaal de evenwichtsverdeling van dit proces.

(c) Stel nu dat de looptijd van een component niet exponentieel verdeeld is met verwachtingswaarde $1/\alpha$ maar een Weibull verdeling met dezelfde verwachtingswaarde $1/\alpha$ heeft. Wat is de fractie tijd dat het systeem down is?

3. (a) Twee teams A en B spelen een serie wedstrijden tegen elkaar totdat één van de teams drie keer achter elkaar gewonnen heeft. De kans dat team A een gegeven wedstrijd wint is p_A en de kans dat team B een gegeven wedstrijd wint is $p_B = 1 - p_A$. De uitslagen van de verschillende wedstrijden worden onafhankelijk van elkaar verondersteld. Laat zien

hoe met behulp van een geschikt gekozen discrete-tijds Markov keten de kansverdeling van het aantal te spelen wedstrijden wordt berekend.

3. (b) Beschouw een continue-tijds Markov keten met eindige toestandsruimte I en infinitesimale transitie-intensiteiten q_{ij} . Definieer $p_{ij}(t)$ als de kans dat het proces over t tijdseenheden in toestand j zal zijn als het nu in toestand i is. Geef een gedetailleerde afleiding van een stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen voor de kansen $p_{ij}(t)$.

4. Beschouw een open netwerk van K bedieningsstations $j = 1, \dots, K$, waarbij het externe aankomstproces van klanten bij station j een Poisson proces is met parameter λ_j . Elk station heeft één bediende en de bedieningstijd bij station j is exponentieel verdeeld met verwachtingswaarde $1/\mu_j$. Een klant die bediend is bij station i gaat vervolgens naar station j met kans p_{ij} of verlaat het systeem met kans $p_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^K p_{ij}$.

(a) Stel de verkeersvergelijkingen voor dit systeem op en geef een beargumenteerde afleiding.

(b) Wat is de simultane evenwichtsverdeling van de aantallen klanten aanwezig bij de verschillende stations? U hoeft deze verdeling niet af te leiden maar u wordt wel gevraagd een heuristische toelichting te geven.

(c) Wat is de relatie tussen het gemiddeld totale aantal klanten in het systeem en de gemiddelde verblijftijd van een nieuw aankomende klant in het systeem?

Puntentoekenning (elke som is 18 punten):

som 1(a), 1(b) elk 6 punten, 1(c), 1(d) elk 3 punten

som 2(a), 2(b), elk 7 punten, som 2(c) 4 punten

som 3(a), 3(b) elk 9 punten

som 4(a), 4(b), 4(c), elk 6 punten.