

TENTAMEN STOCHASTISCHE METHODEN VOOR BWI

8 april 1999

1(a). Hoe is een niet-stationair Poisson proces gedefinieerd? Beschouw de volgende situatie. Een rondvaartboot vertrekt om de T minuten precies voor een gegeven waarde van T . Potentiële passagiers komen langs de vertrekplaats volgens een Poisson proces met parameter λ . Een potentiële passagier die op de klok ziet dat de boot over t minuten vertrekt gaat mee met een gegeven kans $e^{-\mu t}$ voor $0 \leq t \leq T$. De boot heeft voldoende grote capaciteit. Welk stochastisch proces beschrijft het aankomstproces van passagiers die meegaan en wat is de intensiteitsfunctie van dit proces?

(b). Het befaamde Amsterdamse wijncafé 'Père Henri' koopt elk najaar voor haar stamgasten een hoeveelheid Beaujolais Primeur in. De wijn wordt geschonken tot het eind van het jaar. Uit ervaring weet de eigenaar van 'Père Henri' dat de totale vraag van de stamgasten naar de Beaujolais Primeur homogeen verdeeld is tussen a liter en b liter voor zekere a en b met $0 < a < b$. De eigenaar koopt speciaal voor de stamgasten z liter van deze wijn in voor een zekere z met $a < z < b$. Als aan het eind van het jaar wijn overblijft van de ingekochte Beaujolais Primeur, dan gaat het restant in de aanbieding in de winkel die aan het wijncafé verbonden is. Op elke overgebleven liter wordt dan een verlies van h gulden geleden. Is de ingekochte hoeveelheid Beaujolais Primeur niet voldoende om de voorzien in de vraag van de stamgasten, dan wordt het tekort aangevuld door duurdere Beaujolais uit de winkel. Op elke liter Beaujolais die uit de winkel moet komen wordt p gulden aan extra kosten gemaakt.

Bereken met behulp van de wet van voorwaardelijke verwachtingen de verwachtingswaarde van de kosten die verbonden zijn aan een teveel of tekort aan Beaujolais Primeur.

2(a). Twee even sterke teams spelen tegen elkaar een serie wedstrijden totdat één van de teams drie keer achter elkaar gewonnen heeft. Laat zien hoe uit de overgangskansen van een geschikt gekozen Markov keten de kansverdeling van de lengte van het spel berekend kan worden.

(b). Beschouw een discrete-tijds Markovketen met een eindige toestandruimte I en 1-stapsovergangskansen p_{ij} . Hoe zijn de begrippen doorgangstoestand en terugkeertoestand gedefinieerd? Geef een interpretatie van de oneindige som $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$ en bewijs deze interpretatie. Karakteriseer een doorgangstoestand en terugkeertoestand in termen van deze oneindige som.

3. Mevrouw B. Swart-Reijder gaat iedere ochtend om dezelfde tijd met tram 3 van haar huis bij het Westerpark naar het Tropenmuseum in het Oosterpark. Deze rit is drie strippen en zou haar elke keer fl. 2,20 kosten als ze zou afstempen. Echter ze stempelt niet altijd af en neemt dus het risico van een boete van fl. 64,50 wanneer ze zonder kaartje betrapt wordt. Mevrouw Swart-Reijder weet dat op tram 3, door haar schertsend de Oriënt Express genoemd, vaak niet wordt gecontroleerd. Jarenlange ervaring heeft haar geleerd dat met kans $p_i = 1 - (\frac{1}{1.01})^{i+1}$ er controle is op een ochtend wanneer op elk van de i voorgaande ochtenden niet gecontroleerd is. Haar strategie is als volgt. Zij stempelt 's ochtends alleen wanneer het aantal voorgaande ochtenden achter elkaar zonder controle groter is dan i_0 . Graag wil mevrouw Swart-Reijder weten wat haar gemiddelde kosten per dag zijn onder deze strategie.

(a) Formuleer een discrete-tijds Markov model om bovenstaand probleem te analyseren. Wat zijn de toestanden van uw Markov keten en de 1-staps overgangskansen?

(b) Schrijf de evenwichtsvergelijkingen uit voor de Markov keten. Geef een interpretatie van de evenwichtskansen van de Markov keten in termen van lange-termijn gemiddelde. Geef een formule voor de gemiddelde kosten per dag.

4. In een haven met een onbeperkt aantal ligplaatsen komen schepen aan volgens een Poisson proces met parameter λ . Elk van de schepen moet gelost worden en daarvoor is slechts één losinstallatie ter beschikking. De losinstallatie kan niet aan meer dan 1 schip tegelijk werken. De lostijd per schip is exponentieel verdeeld met verwachting $1/\mu$. Tijdens het lossen van een schip kan de losinstallatie door een storing getroffen worden en het lossen van het schip wordt dan stilgelegd totdat de storing verholpen is. De tijd dat de losinstallatie zonder storingen werkt is exponentieel verdeeld met verwachting $1/\alpha$ terwijl de tijd nodig om een storing te verhelpen exponentieel verdeeld is met verwachting $1/\beta$. De losinstallatie kan alleen stukgaan tijdens het lossen.

(a) Definieer een geschikte continue-tijds Markov keten om dit probleem te analyseren, waarbij u het toestandsdiagram en de transitie-intensiteiten op precieze wijze specificeert.

(b) Laat zien hoe de evenwichtsverdeling van de continue-tijds Markov keten berekend kan worden.

(c) Laat zien hoe uit de evenwichtsverdeling het gemiddeld aantal schepen in de haven en de gemiddelde verblijftijd per schip berekend kunnen worden.

5(a). Beschrijf het algemene principe waarmee u voor een willekeurig wachttijdmodel met onbegrensd grote wachtruimte een relatie kunt afleiden tussen de gemiddelde wachttijd per klant en de gemiddelde lengte per wachtrij. Geef de formule van Little ook voor het gemiddeld aantal bezette bediendes.

(b) Beschouw het Erlang verliesmodel met c bediendes waarbij klanten aankomen volgens een Poisson proces met parameter λ en een klant verloren gaat als deze bij aankomst alle bedienden bezet treft. Veronderstel eerst dat de bedieningstijd per klant exponentieel verdeeld is met verwachting $1/\mu$ en geef de afleiding van de formule voor de fractie klanten die verloren gaat. Welke eigenschap heeft deze formule met betrekking tot de vorm van de kansverdeling van bedieningstijd?