

TENTAMEN STOCHASTISCHE METHODEN VOOR BWI

4 januari 1999

Opgave 1

(a) De kassier van de Vrije Universiteit neemt iedere ochtend om dezelfde tijd de metro van Amsterdam-Sloterdijk naar Amsterdam-WTC. Op een vaste plek op het metrostation wacht hij de komst van de metro af. Het is elke keer weer een verrassing waar de metro precies stopt. Uit ervaring weet de kassier dat na het stoppen van de metro de afstand van zijn plek tot de dichtstbijzijnde metrodeur uniform verdeeld is tussen 0 en 2 meter. Is de dichtstbijzijnde metrodeur x meter verwijderd van de plek waar de kassier staat, dan is de kans dat hij een zitplaats verovert gelijk aan $1 - \sqrt{x/2}$. Bereken de kans dat de kassier op een willekeurige ochtend een zitplaats bemachtigt.

(b) Hoe is een niet-stationair Poisson proces gedefinieerd? Beschouw vervolgens de volgende situatie. Bij de Vrije Universiteit is een heel groot nieuw parkeerterrein aangelegd met betaald parkeren. Amsterdam kent echter vele zwartparkeerders en deze komen aan bij het parkeerterrein volgens een Poisson proces met parameter λ . De parkeertijd van elk van hen is exponentieel verdeeld met verwachting $1/\mu$. De gevreesde parkeerdienst van Amsterdam doet met vaste tussentijden een inval op het parkeerterrein en geeft dan elke nieuwe zwartparkeerder die ze aantreffen een bekeuring. De invallen vinden precies om de T tijdseenheden plaats. Welk stochastisch proces beschrijft de aankomst van zwartparkeerders die een bekeuring krijgen en wat is de aankomstintensiteit van dit proces?

Opgave 2

(a) Twee even sterke teams spelen tegen elkaar een serie wedstrijden totdat één van de teams 3 keer achter elkaar gewonnen heeft. Laat zien hoe uit de overgangskansen van een geschikt gekozen Markovketen de kansverdeling van de lengte van het spel berekend kan worden.

(b) Beschouw een discrete-tijds Markovketen met een eindige toestandsruimte I en 1-stapsovergangskansen p_{ij} . Hoe zijn de begrippen doorgangstoestand en terugkeertoestand gedefinieerd? Geef een interpretatie van de oneindige som $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$ en bewijs deze interpretatie. Karakteriseer een doorgangstoestand en terugkeertoestand in termen van deze oneindige som.

Opgave 3

Via een verzendkanaal van een satelliet worden boodschappen verstuurd. Langs dit kanaal kan slechts één boodschap tegelijk worden verstuurd. De tijd nodig voor de verzending van een boodschap is exponentieel verdeeld met verwachting $1/\mu$. Boodschappen komen bij het verzendkanaal aan volgens een Poisson proces met parameter λ . Een aankomende boodschap die het verzendkanaal bezet treft, wordt tijdelijk in een buffer opgeslagen totdat de boodschap aan de beurt is. De buffer heeft een onbegrensd grote capaciteit. Het verzendkanaal wordt echter van tijd tot tijd door storingen getroffen. Als een storing optreedt terwijl een boodschap in verzending is, dan wordt de verzending onderbroken totdat de storing verholpen is waarna de onderbroken verzending wordt voortgezet vanaf het punt waarop de verzending onderbroken was. De tijd nodig om een storing te verhelpen is exponentieel verdeeld met verwachting $1/\alpha$. Nadat de storing verholpen is, is de tijd dat het verzendkanaal storingsvrij is exponentieel verdeeld met verwachting $1/\beta$ (we nemen aan dat een storing ook kan optreden wanneer het verzendkanaal niet bezet is).

- (a) Definieer een geschikte continue-tijds Markovketen om dit probleem te analyseren. Specificeer het toestandsdiagram en de transitie-intensiteiten. Laat zien hoe de evenwichtsverdeling van deze continue-tijd Markovketen berekend kan worden.
- (b) Wat is de kans dat een nieuw aankomende boodschap niet meteen verzonden kan worden? Wat is het gemiddeld aantal boodschappen dat in de buffer op verzending wacht en wat is de gemiddelde wachttijd van een boodschap in de buffer? Geef ook een uitdrukking voor de gemiddelde verblijftijd van een boodschap in de satelliet (de tijd tussen aankomst en moment dat verzending van de boodschap afgerond is). Motiveer uw antwoorden.

Opgave 4

- (a) Bij een telefooncentrale met c telefoonlijnen worden gesprekken aangeboden volgens een Poisson proces met parameter λ . Een aankomend gesprek dat alle c lijnen bezet treft, gaat verloren en heeft geen verdere invloed op het systeem. De tijd dat een geaccepteerd gesprek de lijn bezet houdt is exponentieel verdeeld met verwachting $1/\mu$. Gebruik een geschikt gekozen continue-tijd Markovketen om de verlieskans te berekenen oftewel de fractie aankomende gesprekken die verloren gaan. Specificeer het toestandsdiagram en geef de afleiding van (Erlang's) verlieskans.
- (b) Een parkeerruimte heeft plaats voor c auto's. Bij de parkeerplaats komen lang- en kortparkeerders aan volgens onafhankelijke Poisson processen met respectievelijke parameters λ_1 en λ_2 . De parkeertijd van een langparkeerder is uniform (a_1, b_1) verdeeld, terwijl de parkeertijd van een kortparkeerder uniform (a_2, b_2) verdeeld is. Een aankomende auto die alle c parkeerplaatsen bezet treft kan uiteraard niet parkeren op onze parkeerruimte en gaat naar een parkeergarage elders. Hoe berekent u de fractie auto's die elders moet parkeren? Motiveer uw antwoord.

Opgave 5

- (a) Beschrijf het algemene principe waarmee u voor een willekeurig wachttijdmodel met onbegrensd grote wachtruimte een relatie kunt afleiden tussen de gemiddelde wachttijd per klant en de gemiddelde lengte van de wachtrij. Geef de formule van Little ook voor het gemiddeld aantal bezette bediendes.
- (b) Geef een afleiding van de Pollaczek-Khintchine formule voor de gemiddelde wachttijd per klant in het $M/G/1$ wachttijdmodel. Geef voor dit model ook een uitdrukking voor de fractie tijd dat de bediende bezet is en de fractie klanten die moet wachten.