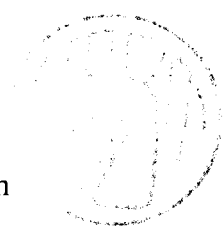


TENTAMEN STOCHASTISCHE METHODEN VOOR BWI

9 april 1998

1. (a) Stel klanten van de types 1 en 2 komen aan bij een bedieningsstation volgens onafhankelijke Poisson processes met respectievelijke parameters λ_1 en λ_2 . De bedieningstijd van een klant van type i is verdeeld als de stochastische variabele S_i voor i van $i = 1, 2$. Wat is de kans dat een willekeurige klant van type i is? Wat zijn de verwachting en spreiding van de bedieningstijd van een willekeurige klant?
(b) Geef de definitie van een niet-stationair Poisson proces en laat zien hoe je de aankomsttijdstippen in een niet-stationair Poisson proces kunt simuleren. Hoe is een samengesteld (compound) Poisson proces gedefinieerd en geef een voorbeeld.
2. Beschouw een discrete-tijds Markov keten met toestandsruimte I en 1-stapsovergangskansen p_{ij} .
(a) Hoe zijn de begrippen doorgangstoestand en terugkeertoestand gedefinieerd? Geef een interpretatie van de grootheid $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$ en bewijs deze interpretatie.
Karakteriseer een doorgangs- en terugkeertoestand in termen van deze grootheid.
(b) Geef een tegenvoorbeeld dat aantoont dat $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$ niet altijd bestaat. Welke limiet met betrekking tot de n -stapsovergangskansen bestaat wel altijd? Onder welke voorwaarden is deze limiet niet afhankelijk van de begintoestand? Geef een probabilistische interpretatie van de limiet.
3. Een productiemachine wordt aan het begin van elke dag geïnspecteerd om te zien in welke staat de machine verkeert. De inspectie onthult de precieze toestand van de machine en N mogelijke toestanden $i = 1, \dots, N$ worden onderscheiden. Hierbij correspondeert toestand 1 met een machine die in perfecte staat is en toestand N met een machine die defect is. In toestand N is een gedwongen reparatie nodig. Deze reparatie duurt 1 dag en brengt vaste kosten $K_g > 0$ met zich mee. In de tussentijdse toestanden $i = 2, \dots, N-1$ kun je de machine laten voor wat het is of een preventieve reparatie uitvoeren. Een preventieve reparatie neemt ook 1 dag in beslag en brengt vaste kosten K_p met $0 < K_p < K_g$ met zich mee. Na elke reparatie is de machine de volgende ochtend weer in perfecte staat. Als aan begin van de dag de machine in toestand i ($i \neq N$) is en die dag in werking is, dan wordt die dag een productieopbrengst ter waarde R_i gemaakt en is aan het begin van de volgende dag de machine in conditie j met een gegeven kans q_{ij} waarbij $q_{ij} = 0$ voor $j < i$. De strategie is als volgt en wordt gekarakteriseerd door een gegeven positief getal m : tot een reparatie wordt alleen overgegaan als bij inspectie blijkt dat de toestand i groter dan m is.
(a) Definieer een geschikte Markov keten om het productieproces te analyseren en bepaal de 1-stapsovergangskansen van deze Markov keten.
(b) Laat zien hoe de evenwichtsverdeling van de Markov keten berekend kan worden. Wat is de gemiddelde opbrengst per dag en wat is de fractie dagen dat de machine in reparatie is?

- 
4. In een haven met een onbeperkt aantal ligplaatsen komen schepen aan volgens een Poisson proces met parameter λ . Elk van de schepen moet gelost worden en daarvoor is slechts één losinstallatie ter beschikking. De losinstallatie kan niet aan meer dan 1 schip tegelijk werken. De lostijd per schip is exponentieel verdeeld met verwachting $1/\mu$. Tijdens het lossen van een schip kan de losinstallatie door een storing getroffen worden en het lossen van het schip wordt dan stilgelegd totdat de storing verholpen is. De tijd dat de losinstallatie zonder storingen werkt is exponentieel verdeeld met verwachting $1/\alpha$ terwijl de tijd nodig om een storing te verhelpen exponentieel verdeeld is met verwachting $1/\beta$.
- (a) Definieer een geschikte continue-tijds Markov keten om dit probleem te analyseren, waarbij u het toestandsdiagram en de transitie-intensiteiten op precieze wijze specificeert.
 - (b) Laat zien hoe de evenwichtsverdeling van de continue-tijds Markov keten berekend kan worden.
 - (c) Laat zien hoe uit de evenwichtsverdeling het gemiddeld aantal schepen in de haven en de gemiddelde verblijftijd per schip berekend kunnen worden.
5. (a) Definieer het M/G/1 wachttijdmodel en leidt af wat de fractie van de tijd dat de bediende bezet is. Beargumenteer vervolgens een formule voor de fractie klanten die wachten moeten. Stel dat je een formule hebt voor de gemiddelde wachttijd per klant. Hoe kun je daaruit meteen een formule afleiden voor het gemiddeld aantal wachtende klanten?
- (b) Beschouw het Erlang verliesmodel met c bediendes waarbij klanten aankomen volgens een Poisson proces met parameter λ en een klant verloren gaat als deze bij aankomst alle bedienden bezet treft. Veronderstel eerst dat de bedieningstijd per klant exponentieel verdeeld is met verwachting $1/\mu$ en geef de afleiding van de formule voor de fractie klanten die verloren gaat. Welke eigenschap heeft deze formule met betrekking tot de bedieningstijdverdeling?
 - (c) Stel je hebt een systeem dat bestaat uit c componenten die onafhankelijk van elkaar werken. De looptijd van elke component is exponentieel verdeeld met verwachting $1/\mu$. Er is slechts één reparateur voor kapotte componenten en deze reparateur kan aan slechts één component tegelijk werken. De reparatietijd van een component is exponentieel verdeeld met verwachting $1/\lambda$. Het systeem als geheel is down wanneer geen enkele van de c componenten in werking is. Kunt u een formule geven voor de fractie tijd dat het systeem down is? Verandert deze formule als de reparatietijd niet exponentieel verdeeld is maar gelijk is aan een constante $D=1/\lambda$?