



Tentamen Stochastische Methoden voor BWI, 5 januari 1998

1(a). Stel u heeft een niet-negatieve stochastische variabele met kansverdelingsfunctie $F(x)$ en kansdichtheid $f(x)$. Wat is de failure-rate functie? Geef de interpretatie ervan en beargumenteer deze. Welke continue verdeling heeft een constante failure-rate?

(b) Hoe is een niet-stationair Poisson proces gedefinieerd? Beschouw vervolgens de volgende situatie. Bij de afvaartplaats van een rondvaartboot komen potentiële passagiers aan volgens een Poisson proces met parameter λ . De boot vertrekt om de T tijdseenheden precies met T gegeven. Een potentiële passagier besluit met kans $\alpha(t)$ met de boot mee te gaan als de eerstvolgende boot over t tijdseenheden vertrekt, $0 \leq t \leq T$. Welk stochastisch proces beschrijft het aankomstproces van passagiers die meegaan en wat is de intensiteitsfunctie van dit proces?

2. Beschouw een voorraadstelsel waarin een bederfelijk product in voorraad gehouden wordt. Klanten voor dit product komen aan volgens een Poisson proces met parameter λ en elke klant vraagt 1 eenheid van het product. De levensduur van elke eenheid product is exponentieel verdeeld met verwachting $1/\mu$. Zodra de voorraad van het product tot nul gedaald is, wordt een aanvulorder ter grootte van Q eenheden geplaatst.

(a) Beschouw de situatie dat de levertijd van een aanvulorder te verwaarlozen is. Definieer een continue-tijds Markov keten dat het verloop van de voorraad beschrijft en geef het toestandsdiagram. Laat zien hoe de evenwichtsverdeling berekend kan worden en geef een uitdrukking voor de gemiddelde voorraad op de planken.

(b) Beschouw vervolgens voor de situatie dat de levertijd van een aanvulorder exponentieel verdeeld is met verwachting $1/\alpha$. Neem aan dat elke vraag die optreedt wanneer het systeem buiten voorraad is verloren gaat. Beantwoord opnieuw de vragen uit (a) en geef een antwoord op de vraag wat de fractie klantenvraag is die verloren gaat.

3. Het Erlang verliesmodel is ontstaan uit het volgende wachttijdprobleem. Bij een telefooncentrale met c lijnen komen aanvragen voor een gesprek aan volgens een Poisson proces met parameter λ . Een aanvraag voor een gesprek gaat verloren

als alle lijnen bezet zijn. Een geaccepteerde gespreksaanvraag houdt een lijn bezet gedurende een exponentieel verdeelde tijd met verwachting $1/\mu$.

(a) Om het aantal bezette lijnen te analyseren, definieer een continue-tijds Markov keten en geef het toestandsdiagram. Bereken de evenwichtsverdeling van uw continue-tijds Markov keten en geef een formule voor de fractie gesprekken die verloren gaat. Neemt de verlieskans al of niet af als de gespreksduur niet exponentieel verdeeld is maar Erlang-verdeeld is met dezelfde verwachting $1/\mu$? Beargumenteer uw antwoorden.

(b) Bij een parkeerplaats met ruimte voor N auto's komen zowel kortparkeerders als langparkeerders aan. Een auto die bij aankomst alle parkeerplaatsen bezet treft, gaat naar elders. De kortparkeerders en langparkeerders komen aan volgens onafhankelijke Poisson processen met respectievelijke parameters λ_1 en λ_2 . De parkeertijd van een kortparkeerder is uniform verdeeld op $[a_1, b_1]$ en die van een langparkeerder is uniform verdeeld op $[a_2, b_2]$. Welk beroemd kansmodel uit de wachttijdtheorie is hier van toepassing en wat is de fractie aankomende auto's die alle parkeerplaatsen bezet treft?

4(a). Twee even sterke teams spelen tegen elkaar totdat één van de teams 3 keer achter elkaar gewonnen heeft. Laat zien hoe uit de n -staps overgangskansen van een geschikt gekozen discrete-tijds Markov keten de kansverdeling van de lengte van het spel berekend kan worden.

(b) Beschouw een (s, S) voorraadmodel waarin de voorraad aan het begin van elke week geïnspecteerd wordt. Als de voorraad kleiner dan s is, dan wordt deze aangevuld tot S ; anders vindt geen aanvulling plaats. Hierbij zijn s en S gegeven getalwaarden met $0 < s < S$. De levertijd van elke aanvulorder is te verwaarlozen. De hoeveelheden vraag naar het product in de opeenvolgende weken $t = 0, 1, \dots$ zijn onafhankelijke stochastische variabelen met eenzelfde discrete kansverdeling $\{\varphi_j, j = 0, 1, \dots\}$. Als de vraag in een week groter is dan de aanwezige voorraad, dan gaat het verschil als vraag verloren. Laat zien hoe het verloop van de voorraad aan het begin van de week beschreven kan worden door een Markov-keten. Geef de 1-staps overgangskansen en geef het algemene stelsel lineaire vergelijkingen waarmee de evenwichtsverdeling berekend kan worden. Hoe kunt u de gemiddelde voorraad op de planken aan het eind van een week en de kans op een tekort in een week in de evenwichtskansen uitdrukken?

5(a). Geef een afleiding van de Pollaczek-Khintchine formule voor de gemiddelde wachttijd per klant in het $M/G/1$ model. Geef ook voor dit model een formule voor de fractie klanten die moet wachten.

(b) Geef de verkeersvergelijking in een open netwerk van wachtrijen (specificeer de betekenis van de door u gebruikte notaties). Welke eigenschap heeft de *simultane* kansverdeling van de aantallen klanten bij de verschillende bedieningsstations in het netwerk?