

Tentamen Stochastic Modelling (400646)

Vrije Universiteit Amsterdam
Faculteit der Exacte Wetenschappen, Afdeling Wiskunde

20 oktober 2015, 12:00 - 14:00 uur

Dit tentamen bestaat uit vier opgaven. Gebruik van boeken en grafische rekenmachine is niet toegestaan.

Bij elk onderdeel staat tussen rechte haken vermeld hoeveel punten voor het onderdeel behaald kunnen worden. Het tentamencijfer wordt gegeven door $p/3 + 1$ waarbij p het totaal aantal door u behaalde punten is. Vermeld uw naam en studentnummer op alle in te leveren formulieren en geef bij elke vraag duidelijk aan hoe u tot uw antwoord bent gekomen.

Veel succes!

Opgave 1

Beschouw een Markov keten met toestandruimte $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ en overgangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) [1 pt.] Teken het netwerk van mogelijke transitie's en bepaal de klassen van onderling communicerende toestanden.
- (b) [2 pt.] Bepaal de fractie tijd dat het proces in ieder van de toestanden verblijft.

- (c) [2 pt.] Wat is de kans dat, startend vanuit toestand 1, de Markov keten *nooit* een directe overgang maakt van toestand 1 naar toestand 3?
- (d) [2 pt.] Wat is het verwachte aantal benodigde transities om toestand 2 te bereiken, startend in toestand 1?

Opgave 2

Rijkswaterstaat voert verkeersmetingen uit op de ring Utrecht.

- (a) [3 pt.] Er wordt geconstateerd dat drie op de vier vrachtwagens op de weg wordt gevolgd door een auto, terwijl maar één op de vijf auto's gevolgd wordt door een vrachtwagen. Wat is de fractie vrachtwagens op de weg?
- (b) [2 pt.] Er wordt verder geconstateerd dat het aantal auto's dat het meetpunt passeert een Poisson proces vormt met een intensiteit λ_1 per uur. Wat is de kans dat in de komende minuut tenminste 5 auto's het meetpunt passeren (uitgedrukt in termen van de intensiteit)?
- (c) [2 pt.] Het aantal vrachtwagens dat het meetpunt passeert blijkt eveneens een Poisson proces te vormen met een intensiteit van λ_2 per uur. Ook blijkt dat 30% van de vrachtwagenchauffeurs zich niet houdt aan de richtlijnen voor het nemen van rust. Wat is de kans dat er precies drie vrachtwagens met een chauffeur die zich wel aan de rust richtlijnen houdt het meetpunt passeren voordat de eerste auto langs het meetpunt komt (uitgedrukt in termen van de intensiteiten)?

Opgave 3

Een klein maar populair kunstmuseum is dag en nacht geopend en heeft een capaciteit van D personen. Fysiek passen er veel meer dan D personen in het museum, maar het museum vindt dat dit een negatieve invloed heeft op de ervaring. Indien er gedurende een bepaald uur teveel klanten in het museum aanwezig zijn, rekent het museum zichzelf voor interne calculaties een boete toe van B per klant boven de capaciteit D . De toegang tot het museum wordt strikt gecontroleerd. Aan het begin van elk uur worden er precies M personen toegelaten (uit de ellenlange wachtrij voor het museum). Iedere klant verblijft een stochastische tijd in het museum. De verblijftijden van de verschillende klanten zijn onafhankelijk van elkaar en zijn exponentieel verdeeld met een verwachtingswaarde van $1/\mu$ uur. Je wilt het verloop analyseren van het aantal klanten in het museum per uur van de dag.

- (a) [3 pt.] Definieer een geschikte Markov keten en specificeer de overgangskansen.
- (b) [4 pt.] Bepaal de evenwichtsverdeling en bepaal de verwachte kosten per tijdseenheid in termen van de evenwichtsverdeling.

Opgave 4

Datapakketten komen aan bij een router volgens een Poisson proces met een gemiddelde van 10 pakketten per milliseconde. De router heeft een buffer van drie pakketten, zodat pakketten die binnenkomen op het moment dat er reeds drie pakketten bij de router aanwezig zijn geweigerd worden. De tijd die nodig is om een datapakket te verwerken is exponentieel verdeeld met een verwachtingswaarde van 0,05 milliseconden. De router verwerkt de pakketten op basis van ‘first come, first served’ (FCFS).

- (a) [3 pt.] Bereken het gemiddeld aantal datapakketten dat zich in de buffer van de router bevindt.
- (b) [3 pt.] Als de router nu voor het eerst in gebruik wordt genomen, wat is dan de verwachte tijd totdat de buffer voor het eerst vol is?