

VRIJE UNIVERSITEIT AMSTERDAM
Faculteit der Exacte Wetenschappen, Afdeling Wiskunde
Tentamen STOCHASTISCHE PROCESSEN (401026)
op 19 december 2011, 12.00 – 14.00 uur.

Dit tentamen bestaat uit vier opgaven. Gebruik van het boek en grafische rekenmachine is niet toegestaan.

Bij elk onderdeel staat tussen rechte haken vermeld hoeveel punten voor het onderdeel kunnen worden verkregen. Het tentamencijfer wordt gegeven door: # punten/3 + 1.

Opgave 1. De afdeling radiologie van een ziekenhuis heeft twee type MRI scans X en Y. Patiënten voor de MRI arriveren volgens een Poisson proces met intensiteit λ per uur. Van deze patiënten heeft 40% een MRI scan van type X nodig en 60% een scan van type Y, ongeacht het moment van aankomst.

- (a) [2 pt.] Wat is de kans dat er gedurende de komende twee uur niet meer dan 2 patiënten aankomen die een MRI van type X nodig hebben?
- (b) [2 pt.] Wat is de kans dat er gedurende de komende twee uur geen patiënten aankomen die een MRI van type X nodig hebben én minstens 1 patiënt die een MRI van type Y nodig heeft?
- (c) [1 pt.] Laat zien dat de kans dat gedurende de komende twee uur er niet meer dan 1 patiënt van type Y aankomt én het aantal aankomsten van type X niet groter is dan het aantal aankomsten van type Y gelijk is aan

$$e^{-2\lambda} \left(1 + \frac{6}{5}\lambda + \frac{24}{25}\lambda^2 \right).$$

- (d) [2 pt.] Stel dat de duur van een MRI van type X exponentieel verdeeld is met parameter μ . Wat is de kans dat er gedurende een MRI van type X minstens 2 patiënten aankomen die een MRI van type X nodig hebben?

Opgave 2. Een groot winkelconcern bestelt wekelijks een bepaald type product bij één van twee leveranciers, A of B. Een contract tussen het winkelconcern en leverancier A bepaalt dat niet meer dan drie opeenvolgende weken producten van leverancier B besteld mogen worden. Na een bestelling bij A bestelt het winkelconcern de week erna opnieuw producten bij A met kans 0.6, ongeacht het bestelpatroon daarvoor. Indien de laatste bestelling bij B was en de bestelling daarvoor bij A, dan zal de nieuwe bestelling met kans 0.7 bij A zijn. Indien de afgelopen twee bestellingen bij B waren en de bestelling daarvoor bij A, dan zal de nieuwe bestelling met kans 0.3 bij A zijn. Na 3 opeenvolgende bestellingen bij B zal de volgende bestelling altijd bij A zijn.

- (a) [3 pt.] Formuleer een discrete-tijd Markov keten die de bestelling bij leveranciers beschrijft en specificeer de matrix van 1-staps overgangskansen.
- (b) [2 pt.] Geef de evenwichtsvergelijkingen en geef in detail aan hoe de evenwichtsverdeling hieruit bepaald kan worden (het exact bepalen hiervan is niet nodig).
- (c) [2 pt.] Stel dat na 3 opeenvolgende bestellingen bij B het winkelconcern met kans p besluit het contract met leverancier A open te breken en alle volgende bestellingen bij B te plaatsen. We nemen aan dat de tijd voor het ontbinden van het contract verwaarloosd kan worden en alle toekomstige bestellingen dus ook bij B zullen zijn. Pas de discrete-tijd Markov keten van onderdeel (a) aan voor deze situatie en geef de nieuwe matrix van 1-staps overgangskansen.

Opgave 3. Beschouw een discrete-tijd Markov keten $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ op de toestanden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ en met de volgende matrix van overgangskansen

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) [2 pt.] Teken het overgangsdiaqram en bepaal de klassen van communicerende toestanden.
- (b) [2 pt.] Stel dat $X_0 = 5$. Wat is $P(X_n = 5)$?
- (c) [1 pt.] Heeft deze Markov keten een limietverdeling?

Opgave 4. Bij een productiesysteem worden geproduceerde producten tijdelijk opgeslagen voor transport naar een centraal magazijn. In de tijdelijke opslag is plaats voor 3 producten. De duur voor het produceren van één product is exponentieel verdeeld met parameter λ . Zodra er 2 producten bij de tijdelijke opslag aanwezig zijn, wordt het transport aangevraagd. De duur van de aanvraag van transport tot het uitvoeren van het transport is exponentieel verdeeld met parameter μ . Wanneer het transport wordt uitgevoerd, dan worden alle op dat moment aanwezige producten in voorraad getransporteerd, zodat de tijdelijke opslag leeg achter blijft. Het productieproces wordt stil gelegd wanneer er 3 producten bij de tijdelijke opslag aanwezig zijn en wordt weer hervat zodra deze 3 producten opgehaald zijn voor transport.

- (a) [3 pt.] Formuleer een geschikte continue-tijd Markov keten en specificeer het toestandsdiagram met de overgangsintensiteiten.
- (b) [2 pt.] Bepaal de evenwichtsvergelijkingen en geef in detail aan hoe de evenwichtsverdeling hieruit bepaald kan worden (het exact bepalen hiervan is niet nodig).
- (c) [3 pt.] Bepaal de verwachte tijd tot het productieproces stil wordt gelegd (ofwel 3 producten bij de tijdelijke opslag zijn), startend met 0 producten bij de tijdelijke opslag.