

VRIJE UNIVERSITEIT AMSTERDAM
Faculteit der Exacte Wetenschappen, Afdeling Wiskunde
Tentamen STOCHASTISCHE PROCESSEN (401026)
op 15 februari 2011, 18.30 – 20.30 uur.

Dit tentamen bestaat uit vier opgaven. Gebruik van het boek en grafische rekenmachine is niet toegestaan.

Bij elk onderdeel staat tussen rechte haken vermeld hoeveel punten voor het onderdeel kunnen worden verkregen. Het tentamencijfer wordt gegeven door: # punten/3 + 1.

'Formuleblad'. Laat S_n een Erlang(n, μ) verdeling hebben. De verdeling van S_n is dan

$$\mathbb{P}(S_n \leq t) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^k}{k!},$$

en de dichtheid is

$$f_{S_n}(t) = \lambda e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Opgave 1. Een machine maakt twee type chips. De bewerkingstijd van de machine is exponentieel verdeeld met een gemiddelde van 5 minuten (intensiteit van 1/5 per minuut). Afhankelijk van het gebruikte materiaal is een chip van type A of B, ieder met kans $\frac{1}{2}$.

- (a) [2 pt.] Wat is de kans dat de machine in een tijdsbestek van 30 minuten tenminste 3 chips maakt? (Ongeacht of dit van type A of B is.)
- (b) [2 pt.] Stel dat een klant die een chip van type A wil kopen zich meldt op het moment dat er geen voorraad is van type A chips. Wat is de kans dat deze klant meer dan 20 minuten moet wachten voordat een chip van type A gereed is?
- (c) [2 pt.] Stel dat klanten arriveren volgens een Poisson proces met intensiteit λ . Wat is de kans dat in de tijd tussen twee opeenvolgende aankomsten van klanten niet één chip gereed is gekomen?
- (d) [2 pt.] De machine is een Erlang(2, μ) verdeelde tijd buiten gebruik. Wat is de kans dat er geen klanten arriveren gedurende deze periode? (Klanten arriveren nog steeds volgens een Poisson proces met intensiteit λ .)

Opgave 2. Een processor wordt wekelijks geïnspecteerd om de staat van de processor te bepalen. De staat van de processor kan *als nieuw, goed, redelijk* of *slecht* zijn. Een nieuwe processor is na een week met kans 0.7 nog steeds als nieuw, met kans 0.2 goed en met kans 0.1 redelijk. Een goede processor is na een week met kans 0.6 nog steeds goed, met kans 0.2 redelijk en met kans 0.2 slecht. Een redelijke processor is na een week met kans 0.5 nog steeds redelijk en met kans 0.5 slecht. Een slechte processor wordt gerepareerd. De reparatie duurt twee weken en na de reparatie is de processor als nieuw.

- (a) [3 pt.] Formuleer een discrete-tijd Markov keten die de staat van de processor beschrijft en specificeer de 1-staps overgangskansen.
- (b) [2 pt.] Geef de evenwichtsvergelijkingen en geef in detail aan hoe de evenwichtsverdeling hieruit bepaald kan worden (het exact bepalen hiervan is niet nodig).
- (c) [2 pt.] Stel dat de staat van de processor nu *goed* is. Wat is het verwachte aantal weken totdat de processor gerepareerd zal moeten worden?

- (d) [2 pt.] Stel dat de staat van de processor nu *als nieuw* is. We zijn geïnteresseerd in de kans dat de duur tot reparatie groter dan 10 weken is. Gebruik een Markov keten met absorberende toestanden om deze kans te bepalen (een numeriek antwoord is hierbij niet nodig).

Opgave 3. [3 pt.] Beschouw een Markov proces met toestandruimte $\{1, 2, 3\}$ en infinitesimale generator

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -3 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Bepaal de evenwichtsverdeling voor dit Markov proces.

Opgave 4. Een klein postorderbedrijf heeft zich gespecialiseerd in spoedleveringen. Klanten met spoedorders komen aan volgens een Poisson proces met intensiteit λ . Het postorderbedrijf heeft twee type bezorgservices: snel en supersnel. Een bezorging met de ‘super snelle’ service is exponentieel verdeeld met parameter μ_1 en de bezorging met de ‘snelle’ service is exponentieel verdeeld met parameter μ_2 . Wanneer een arriverende order aankomt en de ‘supersnelle’ service is beschikbaar, dan wordt hiervoor gekozen; is alleen de ‘snelle’ service beschikbaar, dan wordt deze gebruikt. Wanneer beide services bezet zijn, dan wordt de order in de wacht geplaatst en bezorgd door de service die het eerste vrijkomt. Met het oog op levertijden, kunnen slechts twee orders in de wacht staan (bij twee orders in de wacht worden arriverende orders geweigerd). Het is niet mogelijk om tussentijds van bezorgservice te wisselen.

- [3 pt.] Formuleer een geschikte continue-tijd Markov keten en specificeer het toestandsdiagram met de overgangsintensiteiten.
- [1 pt.] Geef aan waarom de limietverdeling van deze continue-tijd Markov keten bestaat en onafhankelijk is van de begintoestand.
- [2 pt.] Bepaal de evenwichtsvergelijkingen.
- [1 pt.] Stel dat een arriverende order als tweede in de rij komt. Geef een uitdrukking voor de kans dat de wachttijd in de rij groter is dan t .