

Hertentamen Kansrekening 2 voor BWI

27 augustus 2010, 15.15–18.00

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven. Er zijn in totaal 45 punten te behalen (cijfer = $1 + (\text{aantal punten})/5$). Het gebruik van een simpele, niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan. Voorzie elk antwoord van een duidelijke toelichting! Na correctie liggen de gemaakte tentamens ter inzage op het onderwijsbureau.

1. De stochast X heeft de standaard normale verdeling.

(a) [3 punten] Bereken $E(e^{-2X})$.

(b) [3 punten] Introduceer $T = X^2$. Geef de waardenverzameling W_T en toon aan dat voor $t \in W_T$ geldt

$$P(T \leq t) = 2\Phi(\sqrt{t}) - 1,$$

met $\Phi(x)$ de verdelingsfunctie van de standaard normale verdeling.

(c) [3 punten] Toon aan dat de dichtheid van T wordt gegeven door

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2}t} & t \in W_T; \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(d) [3 punten] Bereken $E(\sqrt{T})$.

2. Gegeven is de gezamenlijke kansdichtheid

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{als } 0 < x < 1 \text{ en } 0 < y < 1; \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) [3 punten] Bereken $P(Y < X^2)$.

(b) [3 punten] Toon voor $0 < y < 1$ aan dat

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} 2 \frac{x+y}{1+2y} & \text{voor } 0 < x < 1; \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(c) [3 punten] Bereken $E(X | Y = y)$ voor $0 < y < 1$.

3. De stochasten X en Y zijn onafhankelijk en allebei exponentieel verdeeld met parameter 1. Definieer $U = X + Y$ en $V = Y/X$.

(a) [3 punten] Bepaal de waardenverzamelingen van U en V . Maak voor $u \in W_U$ een schetsje van het juiste integratiegebied in het (x, y) -vlak om $P(U \leq u)$ te berekenen. Doe hetzelfde voor $v \in W_V$ en $P(V \leq v)$.

(b) [4 punten] Bereken nu de integralen en toon aldus aan dat

$$\begin{aligned} P(U \leq u) &= 1 - (u + 1)e^{-u} & u \in W_U; \\ P(V \leq v) &= \frac{v}{v + 1} & v \in W_V. \end{aligned}$$

(c) [4 punten] Toon aan dat U en V onafhankelijk zijn.

(d) [4 punten] Bereken $E(U\sqrt{V+1})$.

4. We bekijken een model voor bosbranden in Californië in het jaar 2011. In dit model is het aantal bosbranden, zeg N , $\text{Poisson}(\lambda)$ verdeeld. Gegeven het aantal bosbranden in 2011, is elke opgetreden bosbrand onafhankelijk van de andere bosbranden met kans p een zware bosbrand en met kans $1 - p$ een lichte bosbrand. Als bijvoorbeeld $N = n$, dan schrijven we

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{als de } i\text{-de bosbrand een zware bosbrand is;} \\ 0 & \text{als de } i\text{-de bosbrand een lichte bosbrand is;} \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Laat Y het totale aantal zware bosbranden in 2011 zijn volgens het model.

(a) [2 punten] Toon aan dat $E(e^{tY_i} \mid N = n) = 1 - p + pe^t$ voor $1 \leq i \leq n$.

(b) [4 punten] Druk Y uit in de Y_i en N , en toon met de wet van totale verwachting aan dat de momentgenererende functie van Y wordt gegeven door

$$M_Y(t) = e^{(e^t - 1)p\lambda}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(c) [3 punten] Bereken de verwachting en variantie van Y met behulp van de momentgenererende functie $M_Y(t)$.