

Tweede deeltentamen Kansrekening 2 voor BWI
25 Mei 2010, 15.15–17.15

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven. Er zijn in totaal 36 punten te behalen (cijfer=(aantal punten)/4+1). Het gebruik van een simpele, niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan. Voorzie elk antwoord van een duidelijke toelichting! Na correctie liggen de gemaakte tentamens ter inzage op het onderwijsbureau.

1. De stochastische vector (X, Y) heeft de volgende kansdichtheid:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x} e^{\frac{1}{2}y^2} & 0 < x < \infty, -\sqrt{x} < y < \sqrt{x}; \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) [1 punt] Schets de waardenverzameling $W_{X,Y}$ in het (x, y) -vlak.
(b) [3 punten] Toon aan dat Y de standaard normale verdeling heeft.
(c) [3 punten] Geef $W_{X|Y=y}$ en toon aan dat $E(e^{-\frac{1}{2}X} | Y = y) = \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}y^2}$.
(d) [4 punten] Bereken $E(e^{-\frac{1}{2}x})$ met de wet van totale verwachting.
Hint: werk toe naar de dichtheid van een $N(0, \sigma^2)$ verdeling.

2. Het jaarlijkse aantal bosbranden in Californië, zeg N , is Poisson(λ) verdeeld. Onafhankelijk van elkaar is elke bosbrand met kans p een zware bosbrand en met kans $1 - p$ een lichte bosbrand. Laat X het aantal zware bosbranden zijn in een jaar en $Y = N - X$ het aantal lichte bosbranden.

- (a) [3 punten] Laat zien dat de gezamenlijke kansmassafunctie van de stochastische vector (X, N) wordt gegeven door

$$p_{X,N}(i, j) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i (\lambda - \lambda p)^{j-i}}{i!(j-i)!} & \text{voor } i, j \in \{0, 1, 2, \dots\} \text{ met } j \geq i, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Hint: bedenk welke conditionele verdeling de stochast X heeft als je weet dat het totale aantal bosbranden j is, en gebruik $p_{X,N}(i, j) = p_{X|N}(i|j)p_N(j)$.

- (b) [3 punten] Bepaal W_X en bereken de marginale kansmassafunctie p_X van X . Toon aldus aan dat X Poisson verdeeld is met parameter λp .
(c) [3 punten] Op grond van symmetrie moet Y nu wel Poisson($\lambda - \lambda p$) verdeeld zijn. Toon aan dat X en Y onafhankelijk zijn.

3. Zij X exponentieel verdeeld met parameter λ , en definieer $Y = e^{-\lambda X}$.

(a) [3 punten] Toon eerst aan dat de momentgenererende functie van een stochast Z die uniform is verdeeld op $(0, 1]$ wordt gegeven door

$$M_Z(t) = \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} & t \neq 0; \\ 1 & t = 0. \end{cases}$$

(b) [3 punten] Toon vervolgens met behulp van momentgenererende functies aan dat de stochast Y uniform is verdeeld op $(0, 1]$. Je kunt hierbij eventueel de substitutie $y = e^{-\lambda x}$ gebruiken.

4. Een vaas bevat aanvankelijk 2 ballen: 1 rode en 1 blauwe. Beginnend op dag 1 trekt Manon aan het eind van elke dag een willekeurige bal uit de vaas, en stopt deze meteen weer terug. Als de bal die Manon trekt blauw is, stopt Daan de volgende ochtend 1 extra blauwe bal in de vaas; als de bal die Manon trekt rood is, verwijdert Daan de volgende ochtend alle aanwezige blauwe ballen uit de vaas. Het experiment gaat tot in de eeuwigheid door.

(a) [3 punten] Laat N de eerste dag zijn waarop Manon de rode bal trekt. Toon aan dat

$$P(N \geq k) = \frac{1}{k} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Hint: beschouw eerst $k = 1$, dan $k = 2$, en vervolgens algemene $k \geq 1$.

(b) [4 punten] Definieer Y_i als het aantal blauwe ballen in de vaas aan het eind van dag i . In onderstaande tabel staan de waarden van de Y_i ingevuld in het geval dat de gebeurtenis $\{N = 2\}$ optreedt. Vul de tabel verder in en toon met de wet van totale verwachting aan dat $E(Y_i) = 1$ voor alle $i \geq 1$.

gebeurtenis	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	$\dots$
$N = 1$							
$N = 2$	1	2	0	0	0	0	$\dots$
$N = 3$							
$N = 4$							
$N = 5$							

(c) [3 punten] Definieer $X_1 = Y_1$ en $X_j = Y_j - Y_{j-1}$ voor $j > 1$. Toon aan:

$$\sum_{j=1}^{\infty} E(X_j) = 1 \quad \text{terwijl} \quad E\left(\sum_{j=1}^{\infty} X_j\right) = 0.$$

“Verwachting som = som verwachtingen” gaat dus niet altijd op!