

Hertentamen Kansrekening 2 voor BWI

28 Augustus 2009, 15.15–18.00

Dit hertentamen bestaat uit 4 opgaven. Er zijn in totaal 45 punten te behalen (cijfer=(aantal punten+5)/5). Het gebruik van een eenvoudige, niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan. Na correctie liggen de gemaakte tentamens ter inzage op het onderwijsbureau.

1. Laat X uniform verdeeld zijn op het interval $(1, 2)$. Definieer $Y = 1/X$.
 - (a) [1 punt] Bepaal de waardenverzameling van Y .
 - (b) [4 punten] Bereken $\text{Var}(Y)$ zonder de dichtheid van Y te berekenen.
 - (c) [4 punten] Bereken de kansdichtheid van Y .

2. De toevalsvariabelen X en Y hebben gezamenlijke kansdichtheid

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2(y-x) & \text{als } 0 < x < 1 \text{ en } x < y < x+1; \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) [1 punt] Maak een schetsje van het gebied in het (x,y) -vlak waar de gezamenlijke dichtheid $f_{X,Y}$ positief is.
 - (b) [4 punten] Definieer $Z = Y - X$. Uit het voorschrift van $f_{X,Y}$ volgt dat de toevalsvariabele Z de waardenverzameling $(0, 1)$ heeft. Toon aan dat

$$P(X \leq a, Z \leq b) = ab^2 \quad \text{voor } 0 < a < 1 \text{ en } 0 < b < 1.$$

- (c) [4 punten] Leid uit het resultaat in (b) de verdelingsfuncties F_X en F_Z van X en Z af, en toon aan dat X en Z onafhankelijk zijn.

Uit de verdelingsfuncties van X en Z is het niet moeilijk om af te leiden dat $E(X) = \frac{1}{2}$, $E(X^2) = \frac{1}{3}$ en $E(Z) = \frac{2}{3}$. Dit hoeft je niet aan te tonen en mag je verder als gegeven beschouwen.

- (d) [4 punten] Bereken $\text{Cov}(X, Y)$ met behulp van de voorgaande gegevens. Hint: bereken $E(XZ)$ en bepaal daaruit $E(XY)$ met $Z = Y - X$.

3. Anthon en Erik gooien ieder net zo vaak met een dobbelsteen totdat ze voor het eerst een zes gooien. Laat X het aantal worpen zijn dat Anthon nodig heeft, en Y het aantal worpen dat Erik nodig heeft.

- (a) [2 punten] Toon aan dat $P(X = Y) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X = n, Y = n) = \frac{1}{11}$.
 (b) [3 punten] Bereken $E(X \mid X = Y)$ met gebruik van het resultaat uit (a).
 Hint: welke kansmassafunctie herken je als je $P(X = n \mid X = Y)$ uitrekent?

Anthon is geïnteresseerd in het aantal keer dat hij een 1 gooit. Voer in

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{als Anthon bij worp } i \text{ een 1 gooit;} \\ 0 & \text{anders;} \end{cases}$$

en laat $Z = \sum_{i=1}^{X-1} Z_i = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{X-1}$ het totale aantal worpen zijn waarbij Anthon een 1 gooit.

- (c) [3 punten] Laat zien dat voor $n > 1$ en $i = 1, 2, \dots, n-1$ geldt

$$E(e^{tZ_i} \mid X = n) = \frac{1}{5}e^t + \frac{4}{5}.$$

- (d) [4 punten] Toon nu (met behulp van de wet van totale verwachting) aan dat de momentgenererende functie van Z wordt gegeven door

$$M_Z(t) = \frac{1}{2 - e^t} \quad \text{voor } e^t < 2.$$

- (e) [3 punten] Bereken $E(Z)$ en $\text{Var}(Z)$ door gebruik te maken van de momentgenererende functie uit onderdeel (d).

4. De toevalsvariabelen X en Y zijn onafhankelijk en hebben beiden zowel verwachting 1 als variantie 1. Echter, X is exponentieel verdeeld, terwijl Y een normale verdeling heeft.

- (a) [4 punten] Bereken $E(Y^2 e^{X/2})$.
 (b) [4 punten] Bereken $P(0 < Y < X)$. Neem de integraal over de waarden die X kan aannemen “aan de binnenkant”.