

Tweede deeltentamen Kansrekening 2 voor BWI

29 Mei 2009, 15.15–17.15

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven. Er zijn in totaal 36 punten te behalen (cijfer=(aantal punten)/4+1). Het gebruik van een eenvoudige, niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan. Na correctie liggen de gemaakte tentamens ter inzage op het onderwijsbureau.

1. Stel dat de toevalsvariabele X uniform is verdeeld op het interval $(0, 1)$ en definieer $Y = 2 \ln(X) = \ln(X^2)$.

(a) [4 punten] Toon aan dat de momentgenererende functie van Y op zijn definitiegebied wordt gegeven door

$$M_Y(t) = \frac{1}{1 + 2t}.$$

Geef ook aan voor welke t de functie $M_Y(t)$ goed gedefinieerd is.

(b) [3 punten] Bereken $\text{Var}(Y)$ met het resultaat uit onderdeel (a).

2. Orjan heeft voor Koninginnedag 2010 het volgende spel bedacht: In een grabbelton zitten 5 ballen genummerd van 0 t/m 4. Een speler trekt één voor één een willekeurige bal uit de ton (zonder terugleggen). Als de speler een bal trekt met nummer n , dan krijgt hij direct n Euro uitbetaald, maar zodra hij de bal met nummer 0 trekt is het spel afgelopen. Voer in:

N = het totale aantal ballen dat de speler trekt;

U = het bedrag (in Euro) dat Orjan aan de speler moet uitbetalen.

(a) [2 punten] Toon aan dat $P(N = n) = \frac{1}{5}$ voor $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

(b) [4 punten] Bereken $E(U)$ door te conditioneren op N .

(c) [3 punten] Gegeven is dat $\text{Var}(U) = 13\frac{1}{3}$. Orjan besluit van elke speler een inzet te vragen die 1 Euro hoger is dan de verwachte uitbetaling $E(U)$. Stel nu dat 100 mensen dit spel willen spelen. Geef met de ongelijkheid van Chebyshev een schatting van de kans dat Orjan geen winst zal maken.

3. De toevalsvariabelen X en Y hebben gezamenlijke kansdichtheid

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x^2} & \text{als } 0 < y < x, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) [3 punten] Bereken $E(XY)$.

(b) [2 punten] Laat zien dat de marginale dichtheid van X wordt gegeven door

$$f_X(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & \text{voor } x > 0, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(c) [4 punten] Bereken $P(Y \leq 1 \mid X = x)$ voor $x > 0$. Let goed op of er misschien verschillende gevallen zijn die je apart moet behandelen.

4. Anthon en Erik gooien ieder net zo vaak met een dobbelsteen totdat ze voor het eerst een zes gooien. Laat X het aantal worpen zijn dat Anthon nodig heeft, en Y het aantal worpen dat Erik nodig heeft.

(a) [2 punten] Beredeneer dat voor elk geheel getal n geldt

$$P(X - Y = -n) = P(X - Y = n).$$

(b) [4 punten] Bereken $P(X - Y = n)$ voor $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

Voer nu de volgende toevalsvariabelen in:

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{als Anthon bij worp } i \text{ een 4 gooit en bij} \\ & \text{alle worpen daarvóór een 1, 2 of 3;} \\ 0 & \text{in alle andere gevallen;} \end{cases}$$

en definieer $Z = \sum_{i=1}^{\infty} Z_i$.

(c) [3 punten] Bepaal $E(Z_i)$ en bereken daarmee $E(Z)$.

(d) [2 punten] Leg uit waarom Z alleen 0 of 1 kan zijn en geef vervolgens met $E(Z) = P(Z = 1)$ een interpretatie van het antwoord bij onderdeel (c).