

Tentamen Kansrekening II voor BWI

30 mei 2007, 8.45-10.45

- Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven en een bijlage. Er zijn 36 punten te behalen, het cijfer wordt gegeven door $(4 + \text{aantal punten})/4$.
- Geef een duidelijke toelichting bij je antwoorden.
- Het gebruik van een 'eenvoudige' rekenmachine is toegestaan; deze rekenmachine mag geen grafische en/of programmeerbare rekenmachine zijn.
- Na correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau.
- Veel succes!

1. Laat X en Y continue stochasten zijn met gezamenlijke dichtheidsfunctie

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{4} & \text{als } 0 \leq x \leq 2 \text{ en } 0 \leq y \leq 2x - x^2, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) (3 punten) Laat zien dat de dichtheidsfunctie van X gegeven wordt door

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2 & \text{als } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(b) (4 punten) Bereken de covariantie tussen X en Y . Je mag gebruiken dat $E(Y) = \frac{2}{5}$.

(c) (2 punten) Zijn X en Y onafhankelijk?

2. Laat X en Y continue stochasten zijn met gezamenlijke dichtheidsfunctie

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-x-3-\frac{y}{x^2}} & \text{als } x \geq 3 \text{ en } y \geq 0, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) (3 punten) Laat zien dat de marginale dichtheid van de stochast X gegeven wordt door

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x+3} & \text{als } x \geq 3, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(b) (4 punten) Bereken $E(Y|X=x)$, voor $x \geq 3$.

(c) (3 punten) Laat zien dat de momentgenererende functie van X op zijn definitiegebied gegeven wordt door

$$M_X(t) = \frac{e^{3t}}{1-t}$$

Geef daarbij duidelijk aan voor welke waarden van t de functie $M_X(t)$ gedefinieerd is.

(d) (3 punten) Bereken met behulp van het resultaat uit het vorige onderdeel de momentgenererende functie van de stochast $Y = 3X - 9$. Bewijs vervolgens met behulp van momentgenererende functies dat Y exponentieel verdeeld is met parameter $\frac{1}{3}$.

3. Laat X en Y onafhankelijke stochasten zijn met respectievelijke dichtheidsfuncties

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

en

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y+1} & \text{als } y \geq 1, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) (4 punten) Bereken de dichtheid f_Z van de stochast $Z = X + Y$. Het is handig om bij het berekenen van $f_Z(z)$ onderscheid te maken tussen de situaties $z < 1$, $1 \leq z \leq 2$ en $z > 2$.

(b) (3 punten) Bereken $E(X + Y)$.

4. Laat $X_1, X_2, \dots$ onafhankelijke identiek verdeelde stochasten zijn met $E(X_i) = 0$ en $\text{Var}(X_i) = \frac{1}{2}$.

(a) (3 punten) Gebruik de Centrale Limietstelling en de tabel in de bijlage om een benadering te geven van $P(X_1 + \dots + X_{50}) < 3$.

(b) (4 punten) Hoe groot moet n gekozen worden om te zorgen dat

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right| \leq \frac{1}{100}\right) \approx 0,95?$$

Gebruik weer de Centrale Limietstelling en de tabel uit de bijlage.

Bijlage bij het tentamen
Kansrekening II voor BWI.

TABLE 5.1 AREA $\Phi(x)$ UNDER THE STANDARD NORMAL CURVE TO THE LEFT OF x

[illegible]