

Tentamen Kansrekening II voor BWI

30 augustus 2005, 13.30-15.30

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven en een bijlage. Er zijn 34 punten te behalen (cijfer=(aantal punten)/3,4). Geef een duidelijke toelichting bij de antwoorden! Het gebruik van een rekenmachine is toegestaan, integralen mogen hier echter niet mee worden uitgerekend. Na de correctie liggen de tentamens ter inzage op het onderwijsbureau. Veel succes!

1. Laat X en Y continue stochasten zijn met gezamenlijke dichtheidsfunctie

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \lambda\mu e^{(\mu-\lambda)x} e^{-\mu y} & \text{als } 0 \leq x \leq y, \\ 0 & \text{elders,} \end{cases}$$

waarbij λ en μ strict positieve parameters zijn met $\lambda \neq \mu$.

- (a) (3 punten) Laat zien dat X exponentieel verdeeld is met parameter λ .
(b) (3 punten) Laat zien dat de marginale dichtheid van Y gegeven wordt door

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda} (e^{-\lambda y} - e^{-\mu y}) & \text{als } y \geq 0, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

- (c) (4 punten) Bereken $E(Y|X=x)$ voor $0 < x < \infty$.
(d) (4 punten) Laat zien dat de momentgenererende functie van Y voor $t < \min\{\lambda, \mu\}$ gegeven wordt door

$$M_Y(t) = \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda} \left(\frac{1}{\lambda-t} - \frac{1}{\mu-t} \right).$$

- (e) (4 punten) Bereken de verwachting van Y met behulp van de momentgenererende functie van Y .

2. (4 punten) Laat X en Y onafhankelijke stochasten zijn met respectievelijke dichtheidsfuncties

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x+1} & \text{als } x \geq 1, \\ 0 & \text{elders,} \end{cases}$$

en

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{als } y \geq 0, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

Bereken de dichtheidsfunctie van de stochast $Z = X + Y$.

3. (4 punten) Laat X en Y stochasten zijn met gezamenlijke dichtheidsfunctie

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-x} & \text{als } 0 < y < x, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

Bereken de covariantie tussen X en Y . Je mag (zonder dit met een berekening te controleren) gebruiken dat $E(X) = 2$ en $E(Y) = 1$.

4. (4 punten) Laat X , Y en Z onafhankelijke $\mathcal{N}(1, 1)$ verdeelde stochasten zijn. Druk $P(X + Y > Z)$ uit in de standaard normale verdelingsfunctie Φ .

5. (4 punten) Herinner je dat de verwachting en de variantie van een stochast die Poisson verdeeld is met parameter λ gelijk zijn aan λ . Laat Y een Poisson verdeelde stochast met parameter 700 zijn.

We kunnen de centrale limietstelling gebruiken om $P(Y > 750)$ te benaderen. Leg uit waarom dat zo is en geef vervolgens de benadering. Druk je antwoord eerst uit in de standaard normale verdelingsfunctie Φ en gebruik vervolgens Tabel 5.1 (zie bijlage).

