

Tentamen Kansrekening II voor BWI

1 juni 2005, 13.30 -15.30

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven en een bijlage. Er zijn 32 punten te behalen (cijfer=(aantal punten)/3,2). Geef een duidelijke toelichting bij de antwoorden! Het gebruik van een rekenmachine is toegestaan, integralen mogen hier echter niet mee worden uitgerekend. Na de correctie liggen de tentamens ter inzage op het onderwijsbureau. Veel succes!

1. Laat X en Y continue stochasten zijn met gezamenlijke dichtheidsfunctie

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{als } 0 \leq x \leq y, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) (1 punt) Maak een schets van het gebied in het xy -vlak waarvoor $f_{X,Y}(x,y)$ positief is.

(b) (3 punten) Laat zien dat de marginale dichtheidsfunctie van Y gegeven wordt door

$$f_Y(y) = \begin{cases} ye^{-y} & \text{als } y \geq 0, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(c) (4 punten) Bereken $E(X|Y=y)$ voor $0 < y < \infty$.

2. (4 punten) De stochasten X en Y zijn onafhankelijk met respectievelijke dichtheidsfuncties

$$f_X(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{als } x \geq 0, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

en

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{als } y \geq 0, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

Bereken de dichtheidsfunctie van $X + Y$.

3. (4 punten) Laat X en Y continue stochasten zijn met gezamenlijke dichtheidsfunctie

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{als } 0 \leq x \leq 1 \text{ en } 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

Bereken de covariantie tussen X en Y .

4. Laat X een continue stochast zijn met dichtheidsfunctie

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda x} & \text{als } x \geq 0, \\ \frac{1}{2}\lambda e^{\lambda x} & \text{als } x < 0, \end{cases}$$

hierbij is λ een strict positieve parameter.

(a) (4 punten) Laat zien dat de momentgenererende functie van X voor $t < \lambda$ gegeven wordt door

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{2(\lambda - t)} + \frac{\lambda}{2(\lambda + t)}.$$

(b) (4 punten) Bereken $\text{Var}(X)$ met behulp van het bij onderdeel (a) verkregen resultaat.

5. Op een vlucht van Amsterdam naar New York moet voor de 250 passagiers water meegenomen worden. We noteren de waterbehoefte van de i de persoon (in liters) tijdens deze vlucht met X_i voor $i \in \{1, \dots, 250\}$. Uit ervaring weet de luchtvaartmaatschappij dat aangenomen kan worden dat de X_i s onafhankelijk zijn met $E(X_i) = 3$ en $\text{Var}(X_i) = 1,6$.

(a) (4 punten) Stel dat er 775 liter water wordt meegenomen tijdens de vlucht. Benader met behulp van de centrale limietstelling de kans dat deze hoeveelheid water tijdens de vlucht helemaal wordt opgebruikt. Druk je antwoord eerst uit in de standaard normale verdelings functie Φ en geef dan een benadering met behulp van tabel 5.1 (zie bijlage).

(b) (4 punten) Hoeveel liter water moet er bij benadering meegenomen worden om te garanderen dat de kans dat de hoeveelheid water tijdens de vlucht helemaal wordt opgebruikt ongeveer 0.05 is? Gebruik weer de centrale limietstelling en tabel 5.1 uit de bijlage.

Kanschening II

Normal Random Variables

TABLE 5.1 AREA $\Phi(x)$ UNDER THE STANDARD NORMAL CURVE TO THE LEFT OF x

[illegible]