

**Korte Uitwerkingen van het tentamen Kansrekening II voor BWI,
18 augustus 2004, 13.30 -16.30**

1. (a) De verdelingsfunctie van X wordt voor $x \in R$ gegeven door $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$. Er geldt dus dat $F_X(x) = 0$ voor $x < 0$ en $F_X(x) = 1$ voor $x > 1$. Voor $x \in [0, 1]$ geldt:

$$F_X(x) = \int_0^x 2u du = [u^2]_0^x = x^2.$$

(b) We berekenen eerst $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}$ en $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{1}{2}$. Nu geldt dat

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

(c) De dichtheid van Z wordt gegeven door

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx.$$

We onderscheiden drie gevallen: voor $z < 0$ geldt dat $f_Z(z) = 0$. Voor $z \in [0, 1]$ geldt dat

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_0^z 2xe^{-(z-x)} dx = 2e^{-z} \int_0^z xe^x dx \\ &= 2e^{-z} [xe^x]_0^z - 2e^{-z} \int_0^z e^x dx = 2z - 2 + 2e^{-z}. \end{aligned}$$

Voor $z > 1$ geldt dat

$$f_Z(z) = \int_0^1 2xe^{-(z-x)} dx = \dots = 2e^{-z}.$$

2.(a) Maak een tekening van het gebied waar de gezamenlijke dichtheid strict positief is. Voor $x \in [0, 4]$ geldt dat $f_X(x) = \int_0^{4-x} \frac{1}{8} dy = \frac{1}{8}(4-x)$. Voor andere x geldt dat $f_X(x) = 0$.

(b) X en Y zijn niet onafhankelijk. Analoog aan onderdeel (a) kun je afleiden dat voor $y \in [0, 4]$ geldt dat $f_Y(y) = \frac{1}{8}(4-y)$ en je ziet dat voor $x \in [0, 4]$ en $y \in [0, 4]$, $f_X(x) \cdot f_Y(y) \neq f_{X,Y}(x, y)$.

(c) Er geldt dat

$$E(X) = E(Y) = \int_0^4 x \cdot \frac{1}{8}(1-x) dx = \dots = \frac{4}{3}.$$

Verder

$$E(XY) = \int_0^4 \int_0^{4-y} xy \cdot \frac{1}{8} dx dy = \dots = \frac{4}{3}.$$

We concluderen dat

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{4}{9}.$$

3. (a)

$$\begin{aligned} E(Y/X) &= \int_0^\infty \int_1^2 \frac{y}{x} x e^{-xy} dx dy \\ &= \int_0^\infty [-e^{-xy}]_1^2 dy = \int_0^\infty e^{-y} - e^{-2y} dy \\ &= \left[-e^{-y} + \frac{1}{2} e^{-2y} \right]_0^\infty = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(b) Voor $x \in [1, 2]$ geldt

$$f_X(x) = \int_0^\infty x e^{-xy} dy = [e^{-xy}]_0^\infty = 1.$$

Voor andere x geldt dat $f_X(x) = 0$. X is inderdaad uniform verdeeld op het interval $[1, 2]$.

(c) We bereken eerst de conditionele dichtheidsfunctie: voor $x \in [1, 2]$ geldt dat

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}.$$

We zien dat $f_{Y|X}(y|x) = x e^{-xy}$ voor $y \geq 0$ en dat $f_{Y|X}(y|x) = 0$ voor andere y .

$$\begin{aligned} E(Y|X = x) &= \int_{-\infty}^\infty y f_{Y|X}(y|x) dy \\ &= \int_0^\infty x y e^{-xy} dy = [-y e^{-xy}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-xy} dy = \\ &= \left[-\frac{e^{-xy}}{x} \right]_0^\infty = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

4. Bedenk dat $V - W$ normaal verdeeld is met verwachting

$$E(V - W) = E(V) - E(W) = 3 - 5 = -2$$

en variantie

$$\text{Var}(V - W) = \text{Var}(V) + \text{Var}(-W) = \text{Var}(V) + \text{Var}(W) = 9 + 16 = 25$$

(V en W zijn onafhankelijk!). Vervolgens berekenen we

$$\begin{aligned} P(V - W > -1) &= P\left(\frac{V - W - (-2)}{5} > \frac{-1 - (-2)}{5}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{1}{5}\right) \approx 1 - 0,5793 = 0,4207. \end{aligned}$$

5. De variantie van X kan berekend worden met behulp van

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = M_X''(0) - (M_X'(0))^2.$$

Er geldt

$$M_X'(t) = \frac{2t}{(1-t^2)^2},$$

dus $E(X) = 0$. Nog een keer de afgeleide nemen en invullen in $t = 0$ levert dat $E(X^2) = 2$, dus $\text{Var}(X) = 2$.

6. Merk op dat $E(X_i) = \frac{1}{4}$ en $\text{Var}(X_i) = \frac{3}{16}$. Met behulp van de centrale limietstelling en de tabel van de standaard normale verdelingsfunctie vinden we nu dat

$$\begin{aligned} P(X_1 + \dots + X_{50} \geq 30) &= P\left(\frac{X_1 + \dots + X_{50} - \frac{50}{4}}{\sqrt{\frac{3}{16} \cdot 50}} \geq \frac{30 - \frac{50}{4}}{\sqrt{\frac{3}{16} \cdot 50}}\right) \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{17,5}{\sqrt{\frac{150}{16}}}\right) \approx 1 - \Phi(5,715) \approx 0. \end{aligned}$$

(De liefhebber zou een continuïteitscorrectie kunnen toepassen, dan kijk je naar de kans dat er 29,5 vraag of meer goed zijn)