

Tweede deeltentamen Kansrekening II voor BWI

26 mei 2004, 10.30 -12.30

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven en een bijlage. Er zijn 36 punten te behalen, het cijfer wordt bepaald door $(4 + \text{behaalde punten})/4$. Geef een toelichting bij je antwoorden! Het gebruik van vooraf ingeleverde formulebladen is toegestaan. Het gebruik van een rekenmachine is ook toegestaan.

1. Laat X en Y continue stochasten zijn met gezamenlijke dichtheidsfunctie

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 24xy & \text{als } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \text{ en tevens } x + y \leq 1, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) (2 punten) Maak een schets van het gebied waar $f_{X,Y}(x, y) > 0$.
- (b) (4 punten) Laat zien dat voor $0 \leq x \leq 1$, de marginale dichtheid van X gegeven wordt door $f_X(x) = 12x(1 - x)^2$ en dat voor $0 \leq y \leq 1$, de marginale dichtheid van Y gegeven wordt door $f_Y(y) = 12y(1 - y)^2$.
- (c) (4 punten) Bereken $E(Y|X = x)$ voor $0 < x < 1$.
- (d) (4 punten) Bereken de covariantie tussen X en Y .

2. (6 punten) De continue stochast X heeft dichtheidsfunctie

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x-1} & \text{als } x > -1 \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

Bereken de moment-genererende functie van X en leid $E(X)$ hieruit af.

3. (6 punten) Laat X en Y continue stochasten zijn met gezamenlijke dichtheidsfunctie

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x + y)e^{-(x+y)} & \text{als } x \geq 0 \text{ en } y \geq 0 \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Bereken de gezamenlijke dichtheidsfunctie van $U = X$ en $V = X + Y$.

4. Een melkfabriek levert pakken melk aan een grote supermarktketen. Neem aan dat de afzonderlijke hoeveelheden melk in de pakken allemaal onafhankelijk van elkaar zijn en dezelfde verdelingsfunctie hebben. De machine waarmee de pakken gevuld worden, kan afgesteld worden zodat de hoeveelheid melk per pak een verwachting heeft van μ liter en een standaarddeviatie van 0.005 liter.

(a) (5 punten) Stel de machine staat afgesteld op $\mu = 1$. We meten de hoeveelheden melk in een steekproef van 40 pakken en noteren deze met $X_1, \dots, X_{40}$. Gebruik de centrale limietstelling om de kans te benaderen dat de gemiddelde hoeveelheid melk in deze pakken minder dan 0,998 liter bedraagt. Druk je antwoord eerst uit in de standaard normale verdelingsfunctie Φ en geef dan een benadering met behulp van tabel 5.1 (zie bijlage).

(b) (*5 punten*) De melkfabriek heeft met de supermarktketen afgesproken dat zij korting krijgt op een bepaalde partij melk als bij een controle van de hoeveelheden melk in een steekproef van 25 pakken, de gemiddelde hoeveelheid melk per pak minder dan 0.997 liter is. Hoe moet de machine afgesteld worden (met andere woorden hoe groot moet μ gekozen worden) om te zorgen dat de kans dat de fabriek korting moet geven ongeveer 0,01 is? Gebruik weer de centrale limietstelling en tabel 5.1 (zie bijlage).