

Eerste deeltentamen Kansrekening II voor BWI

24 maart 2004, 10.30 -12.30

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven. Er zijn 36 punten te behalen, het eindcijfer wordt gegeven door $(4 + \text{behaalde punten})/4$. Geef een toelichting bij je antwoorden! Het gebruik van vooraf ingeleverde formulebladen is toegestaan. Het gebruik van een rekenmachine is ook toegestaan (maar niet noodzakelijk).

1. Laat X een continue stochast zijn met dichtheidsfunctie

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+\alpha x}{2} & \text{als } -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{anders,} \end{cases}$$

waarbij α een onbekende parameter is met $|\alpha| \leq 1$.

- (a) (3 punten) Laat zien dat f inderdaad een dichtheidsfunctie is.
- (b) (4 punten) Bereken de cumulatieve verdelingsfunctie van X .
- (c) (4 punten) Bereken de variantie van X .
- (d) (4 punten) Bereken de dichtheidsfunctie van de stochast $Y = \arcsin(X)$.

2. (5 punten) Laat X een normaal verdeelde stochast zijn met $E(X) = 7$ en $\text{Var}(X)=25$. Druk $P(5 < X < 11)$ uit in termen van de verdelingsfunctie Φ van de standaard normale verdeling. Geef een benadering van deze kans met behulp van tabel 5.1 (zie bijlage).

3. Laat X en Y continue stochasten zijn met gezamenlijke dichtheidsfunctie

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+2y) & \text{als } 0 \leq x \leq 1 \text{ en } 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

- (a) (4 punten) Bereken de marginale dichtheidsfunctie van X .
- (b) (3 punten) Zijn X en Y onafhankelijk? Waarom?
- (c) (4 punten) Bereken $P(X < Y)$.

4. (5 punten) De gezamenlijke dichtheidsfunctie van X en Y wordt gegeven door

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \lambda\mu e^{-\lambda x - \mu y} & \text{voor } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0 & \text{elders,} \end{cases}$$

waarbij λ en μ strict positieve parameters zijn. We definiëren de stochast Z als het minimum van X en Y en schrijven $Z = \min(X, Y)$. Laat zien dat Z exponentieel verdeeld is met parameter $\lambda + \mu$.

Hint: Bereken de cumulatieve verdelingsfunctie van Z en bedenk dat $Z > z$ als zowel $X > z$ als $Y > z$ ($z \in \mathbb{R}$).