



Duur: 2 uur en 45 min.

18 augustus 2003

OPMERKINGEN

- (i) Bijlage: Table 5.1 uit S. ROSS, *A first course in probability*
- (ii) Het gebruik van op het werkcollege ingeleverde formulebladen is toegestaan.
- (iii) Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.
- (iv) Succes!

OPGAVES

1. Zij gegeven $X \sim P$ met verdelingsfunctie $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{als } x < 0, \\ C(1 + \sin(x) - \cos(x)), & \text{als } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{als } x \geq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

waarbij $C > 0$ een normeringsconstante is.

- (a) Geef de dichtheid $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ behorende bij de verdeling van X .
- (b) Bepaal de waarde van C .
- (c) Laat, met behulp van de identiteit $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ (geldig voor alle $x \in \mathbb{R}$), zien dat voor alle $y \in [0, \frac{\pi}{4}]$:

$$f\left(\frac{\pi}{4} - y\right) = f\left(\frac{\pi}{4} + y\right),$$

en beargumenteer daarmee dat $E[X] = \pi/4$.

- (d) Laat met behulp van partiële integratie zien dat:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x) dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(x) dx, \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x) dx &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx. \end{aligned}$$

- (e) Voer nogmaals een partiële integratie uit om de integraal

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx$$

te berekenen. Gebruik vervolgens het feit dat $E[X] = \pi/4$ om de variantie van X te berekenen.

2. Stel dat X normaal verdeeld is met gemiddelde 7 en variantie 9, *i.e.* $X \sim N(7, 9)$.

- (a) Druk de kans

$$P(X > 4),$$

uit in termen van de standaard normale verdelingsfunctie Φ en geef een numerieke benadering met behulp van tabel 5.1. (*zie laatste pagina van dit tentamen.*)

- (b) Gebruik tabel 5.1 om een (numeriek benaderde) waarde voor ξ te kiezen waarvoor

$$P(X \leq \xi) = 0.997.$$

- (c) Geef een uitdrukking voor de kans

$$P(X^2 - 14X \leq -40),$$

in termen van de standaard normale verdelingsfunctie Φ en geef een numerieke benadering met behulp van tabel 5.1.

[Hint: $X^2 - 14X + 49 = (X - 7)^2$.]

3. Zij gegeven de twee-dimensionale stochastische vector $(X, Y) \sim P_{XY}$ met dichtheid $f_{XY} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 2x + 2y - 4xy, & \text{als } 0 \leq x \leq 1 \text{ en } 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{voor alle andere } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

- (a) Bereken de marginale dichtheden voor X en voor Y .
(b) Zijn X en Y onafhankelijk? Beargumenteer uw antwoord.
(c) Laat zien dat (in dit bijzondere geval) geldt:

$$f_{X|Y=y}(x) = f_{XY}(x, y) = f_{Y|X=x}(y),$$

voor alle $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

- (d) Bereken $E[X|Y = y]$ voor alle $y \in [0, 1]$.
(e) Bereken de moment-genererende functie $M_X(t)$ voor X ($t \neq 0$). Om de momenten $E_X[X^n]$ te berekenen bestaat in dit geval een slimmere methode dan het nemen van afgeleides van M_X . Welke?
4. Zijn $X_1, X_2, \dots$ onafhankelijk en gelijk verdeeld (*i.i.d.*) en laat de verdeling van een enkele waarneming gegeven zijn door de Poisson verdeling $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ voor

- (a) Geef de verwachting $E_P[X]$ en variantie $\text{Var}_P[X]$ voor een enkele meting. Geef ook de verwachting $E_{P_n}[\bar{X}_n]$ en variantie $\text{Var}_{P_n}[\bar{X}_n]$ voor het steekproefgemiddelde.
- (b) Welke stelling garandeert dat het steekproefgemiddelde naar λ convergeert? Geef de precieze formulering van de conclusie van die stelling en leg deze met behulp van een schets van de verdeling van $\bar{X}_n$ rond λ uit.
- (c) Formuleer de centrale limietstelling en laat zien dat hieruit volgt dat voor samples met een 'groot' aantal metingen:

$$P_n \left(\lambda - \delta \sqrt{\frac{\lambda}{n}} < \bar{X}_n \leq \lambda + \delta \sqrt{\frac{\lambda}{n}} \right) \approx 2\Phi(\delta) - 1.$$

voor alle $\delta > 0$.

- (d) Veronderstel dat $\lambda = 1$ en $n = 10000$. Vind, met behulp van tabel 5.1 uit Ross en uw antwoord bij onderdeel (c), een waarde voor $\eta > 0$ zodanig dat

$$P_{10000}(\bar{X}_{10000} \in (1 - \eta, 1 + \eta]) \approx 0.995.$$

NORMERING

1(a): 3	2(a): 5	3(a): 3	4(a): 3
1(b): 3	2(b): 5	3(b): 3	4(b): 3
1(c): 3	2(c): 5	3(c): 3	4(c): 4
1(d): 3		3(d): 3	4(d): 5
1(e): 3		3(e): 3	

EINDCIJFER = totaal $\cdot 0.15 + 1$.

[illegible][illegible]