

Duur: 2 uur

28 mei 2003

OPMERKINGEN

- (i) Bijlage: Table 5.1 uit S. Ross, *A first course in probability*
- (ii) Het gebruik van op het werkcollege ingeleverde formulebladen is toegestaan.
- (iii) Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.
- (iv) Succes!

OPGAVES

1. Zij gegeven $(X, Y) \sim P_{XY}$ met dichtheidsfunctie $f_{XY} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2 + y^2), & \text{als } 0 \leq y \leq 1 \text{ en } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) Zijn X en Y onafhankelijk? Beargumenteer uw antwoord.
- (b) Bepaal de marginale dichtheden $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ van X en $f_Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ van Y .
- (c) Geef de conditionele dichtheid $f_{X|Y=y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ voor alle $y \in [0, 1]$.
- (d) Laat zien dat:

$$\mathbb{E}[X|Y = y] = \frac{6y^2 + 3}{12y^2 + 4}.$$

2. Laat $(X, Y) \sim P_{XY}$ met dichtheidsfunctie $f_{XY} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} C(1-x)e^{-\lambda y}, & \text{als } y \geq 0 \text{ en } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{elders,} \end{cases}$$

waarbij $\lambda > 0$.

- (a) Bepaal de normeringsconstante C (als functie van λ).

- (b) Geef de marginale dichtheden $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ van X en $f_Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ van Y .
 (c) Laat zien dat X en Y onafhankelijk zijn.
 (d) Gebruik uw antwoord bij onderdeel (b) om te laten zien dat de moment-genererende functies $M_X(s)$ voor X en $M_Y(t)$ voor Y gegeven worden door:

$$M_X(s) = 2 \frac{e^s - s - 1}{s^2}, \quad (s \in \mathbb{R}), \quad M_Y(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad (t < \lambda).$$

Bereken daarmee $M_{XY}(s, t)$.

- (e) Bereken met behulp van de marginale dichtheid voor X en $M_Y(t)$ de verwachting:

$$E[XY^2].$$

3. Zijn $X_1, X_2, \dots$ onafhankelijk en gelijk verdeeld (*i.i.d*) en laat de verdeling van een enkele waarneming gegeven zijn door $X \sim P = \exp(\lambda)$ voor een onbekende parameter $\lambda > 0$. We beschouwen het steekproefgemiddelde $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

- (a) Geef de verwachting $E_P[X]$ en variantie $\text{Var}_P[X]$ voor een enkele meting. Geef ook de verwachting $E_{P_n}[\bar{X}_n]$ en variantie $\text{Var}_{P_n}[\bar{X}_n]$ voor het steekproefgemiddelde.
 (b) Welke stelling garandeert dat het steekproefgemiddelde naar $1/\lambda$ convergeert? Geef de precieze formulering van de conclusie van die stelling en leg deze met behulp van een schets van de verdeling van $\bar{X}_n$ rond $1/\lambda$ uit.
 (c) Formuleer de centrale limietstelling en laat zien dat hieruit volgt dat voor samples met een 'groot' aantal metingen:

$$P_n\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\delta}{\lambda\sqrt{n}} < \bar{X}_n \leq \frac{1}{\lambda} + \frac{\delta}{\lambda\sqrt{n}}\right) \approx 2\Phi(\delta) - 1.$$

voor alle $\delta > 0$.

- (d) Veronderstel dat $\lambda = 2$ en $n = 100$. Vind, met behulp van tabel 5.1 uit Ross (zie bijgevoegde kopie) en uw antwoord bij onderdeel (c), een waarde voor $\eta > 0$ zodanig dat

$$P_{100}(\bar{X}_{100} \in (\frac{1}{2} - \eta, \frac{1}{2} + \eta]) \approx 0.95.$$

NORMERING

1(a): 3 2(a): 2 3(a): 3
 1(b): 3 2(b): 2 3(b): 3
 1(c): 3 2(c): 2 3(c): 3
 1(d): 3 2(d): 3 3(d): 3
 2(e): 3

EINDCIJFER = (TOTAAL+4)/4