

Duur: 1 uur en 45 min.

26 maart 2003

OPMERKINGEN

- (i) Bijlage: Table 5.1 uit S. Ross, *A first course in probability*
- (ii) Het gebruik van op het werkcollege ingeleverde formulebladen is toegestaan.
- (iii) Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.
- (iv) Succes!

OPGAVES

1. Zij gegeven $X \sim P$ met verdelingsfunctie $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\alpha x}, & \text{als } x < 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\beta x}, & \text{als } x \geq 0, \end{cases}$$

waarbij $\alpha, \beta > 0$ onbekende parameters zijn.

- (a) Geef de dichtheid $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ behorende bij de verdeling van X .
- (b) Laat met behulp van partiële integratie zien dat:

$$E[X] = \frac{1}{2\beta} - \frac{1}{2\alpha}.$$

- (c) Gebruik:

$$E[X^2] = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2},$$

om $\text{Var}[X]$ te berekenen. (*Het eindresultaat hoeft niet vereenvoudigd te worden.*)

- (d) Geef de mediaan van X (zonder te rekenen).
Voor welke keuzes van de parameters $\alpha, \beta > 0$ zijn verwachting en mediaan gelijk?

2. Stel dat X normaal verdeeld is met gemiddelde 3 en variantie 4, *i.e.* $X \sim N(3, 4)$.

(a) Druk de kans

$$P(X > 4),$$

uit in termen van de standaard normale verdelingsfunctie Φ en geef een numerieke benadering met behulp van tabel 5.1. (*zie laatste pagina van dit tentamen.*)

(b) Geef een uitdrukking voor de kans

$$P(|X - 3| \leq \tfrac{1}{2}),$$

in termen van de standaard normale verdelingsfunctie Φ en geef een numerieke benadering met behulp van tabel 5.1.

(c) Gebruik tabel 5.1 om een (numeriek benaderde) waarde voor ξ te kiezen waarvoor

$$P(X \leq \xi) \approx 0.995.$$

3. Zij gegeven de twee-dimensionale stochastische vector $(X, Y) \sim P_{XY}$ met dichtheid $f_{XY} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 6(x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1), & \text{als } 0 \leq x \leq 1 \text{ en } 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{voor alle andere } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

(a) Bereken de marginale dichtheid voor X .

(b) Bereken de verwachting $E[X]$.

(c) Laat zien dat

$$P(X + Y \geq 1) = \tfrac{1}{2}.$$

(*Hint: $f_{XY}(x, y) = 6(x + y - 1)^2$ voor alle $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$.)*)

NORMERING

1(a): 4 2(a): 3 3(a): 4

1(b): 5 2(b): 3 3(b): 3

1(c): 3 2(c): 4 3(c): 3

1(d): 3

EINDCIJFER = (TOTAAL+5)/4