

Kansrekening II voor BWI Hertentamen 14-08-2002

Rekenmachines zijn niet toegestaan, ingewikkelde uitdrukkingen als e-machten of grote breuken hoeft je dus niet te vereenvoudigen.

Je mag je formuleblaadjes gebruiken. Je hebt 3 uur de tijd.

1. (a) Een autoverzekeraar is geïnteresseerd in de tijdsduur T , in dagen, vanaf de ingangsdatum van een polis tot de eerste claim. De verzekeraar stelt dat deze tijdsduur minimaal 10 en maximaal 510 dagen zal zijn; deze extremen zijn echter zeldzaam, meest waarschijnlijk is dat T zal liggen rond de 260 dagen. Modelleer T als continu stochastische grootte. Motiveer je model, onder andere door de kansen $P(250 < T < 270)$ en $P((T < 20) \cup (T > 500))$ te berekenen.
(b) Een concurrerende autoverzekeraar maakt andere aannames over T . Deze verzekeraar stelt dat T in principe alle (positieve) waarden kan aannemen, al ligt voor de gemiddelde polis de waarde van T rond de 200 dagen. Men stelt bovendien dat het claimedrag van verzekerden redelijk stabiel is: voor elke willekeurige tijdsperiode van (zeg) t dagen is de voorwaardelijke kans dat de eerste claim binnen deze periode valt (gegeven dat de claim nog niet vóór het begin van de periode heeft plaatsgevonden) gelijk aan $P(T < t)$. Maak aan de hand van deze nieuwe modelleeraannames een nieuw model voor T als continu stochastische grootte. Motiveer dit model, onder andere door de kansen $P(T < 100)$ en $P(T < 200 \mid T > 100)$ te berekenen.
(c) Bij welke van de twee verzekeraars verwacht je de laagste premies? Beredeneer je antwoord.
2. $V = (X, Y)$ is een stochastische vector met kansdichtheidsfunctie $f(x, y) = C - x^2 - y^2$ voor $0 \leq x, y \leq 1$ en $f(x, y) = 0$ elders, waarbij C een constante is.
(a) Laat zien dat $C = 5/3$.
(b) Bereken de marginale kansdichtheidsfunctie van X .
(c) Bereken $E(Y)$.
(d) Bereken $E(XY)$.
(e) Bereken $E(Y \mid X=0)$.
(f) Geef twee verschillende (en uitgewerkte) argumentaties om aan te tonen dat X en Y niet onafhankelijk kunnen zijn.
(g) Welke van onderstaande uitspraken over X en Y zijn waar: Uitspraak I, Uitspraak II, of geen van beide? (Bewijs je antwoord zorgvuldig.)
Uitspraak I: Voor alle $A, B \subseteq [0, 1]$ geldt dat $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) P(Y \in B)$.
Uitspraak II: Voor alle $A, B \subseteq [0, 1]$ geldt dat $P(X \in A, Y \in B) \neq P(X \in A) P(Y \in B)$.
3. $G_n = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$ is het gemiddelde van n onafhankelijke, identiek verdeelde stochastische grootheden met kansdichtheidsfunctie $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$.
(a) Controleer dat $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.
(b) Zij $M(t)$ de moment genererende functie van X_1 . Bewijs dat $M(t) = (1 - t^2)^{-1}$ voor $-1 < t < 1$.
(c) Bereken de verwachtingswaarde en variantie van X_1 .
(d) Bereken de verwachtingswaarde en variantie van G_n (in termen van n).
(e) Bewijs dat $P(|G_n| \geq \varepsilon) \leq 2/n\varepsilon^2$ voor alle $\varepsilon > 0$ en $n \geq 1$.
(f) Gebruik deel (e) om te bewijzen dat G_n zwak convergeert naar nul voor $n \rightarrow \infty$. Met welke wet had je dit ook rechtstreeks kunnen laten zien?
(g) Zij $M_n(t)$ de moment genererende functie van G_n . Bewijs dat $\log M_n(t) = -n \log(1 - t^2/n^2)$. Laat hiermee zien dat G_n voldoet aan de centrale limietstelling. (Hint: gebruik $-\log(1-x) \approx x$.)

Vraag 4 staat op de volgende pagina!

4. Een fabriek fabriceert microcomponenten. Het gemiddelde gewicht van zo'n component is 1mg, met standaarddeviatie gelijk aan 0,5 mg.
- (a) Stel dat er op een dag 20 microcomponenten worden gefabriceerd. Wat is de kans dat het totale gewicht van alle componenten bij elkaar, groter is dan 22mg? Beredeneer je antwoord zorgvuldig.
- (b) Op een andere dag is het totaal aantal gefabriceerde microcomponenten N geometrisch verdeeld met parameter $\frac{1}{2}$. Zij G nu het totale gewicht van al deze componenten bij elkaar: bereken de verwachtingswaarde en standaarddeviatie van G .

Normering:

VRAAG	1	2	3	4
(a)	4	1	1	3
(b)	4	2	3	4
(c)	1	2	2	
(d)		2	1	
(e)		3	2	
(f)		2	2	
(g)		2	4	
<i>totaal:</i>	9	14	15	7

Cijfer = 1 + Aantal punten / 5