



Kansrekening II voor BWI 2e deeltentamen 7-6-2002

Rekenmachines zijn niet toegestaan. Je mag je formuleblaadjes gebruiken. Je hebt 1¼ uur de tijd.

Beargumenteer alle antwoorden zorgvuldig!

1. $G_n = (X_1 + X_2 + \dots + X_n) / n$ is het gemiddelde van n onafhankelijke, identiek verdeelde stochastische grootheden met kansdichtheidsfunctie f , waar $f(x) = e^{1-x}$ voor $x \geq 1$ en $f(x) = 0$ voor $x < 1$.

- (a) Laat zien dat $E(X_1) = 2$.
- (b) Laat zien dat $\text{Var}(X_1) = 1$.
- (c) Zij $M(t)$ de moment genererende functie van X_1 . Bewijs dat $M(t) = e'(1-t)^{-1}$ voor $|t| \leq 1$.
- (d) Gebruik de moment genererende functie van X_1 om je antwoord op deel (a) te controleren.
- (e) Bereken de verwachtingswaarde en variantie van G_n (in termen van n).
- (f) Bewijs dat $P(|G_n - 2| > \varepsilon) \leq 1 / n\varepsilon^2$ voor alle $\varepsilon > 0$ en $n \geq 1$.
- (g) Gebruik deel (f) om te bewijzen dat G_n zwak convergeert naar 2 voor $n \rightarrow \infty$.
- (h) Zij $M_n(t)$ de moment genererende functie van G_n . Bewijs dat $\log M_n(t) = t - n \log(1 - t/n)$. Laat hiermee zien dat G_n voldoet aan de centrale limietstelling. (Hint: gebruik $-\log(1-x) \approx x + \frac{1}{2}x^2$.)

2. Een schutter schiet een pijl op een vierkant doel van 1m^2 . Hij probeert het doel zo dicht mogelijk bij de bovenrechtse hoek te raken. De positie van het raakpunt van de pijl ten opzichte van de onderste linkse hoek van het doel (in meters) modelleert men als random vector $\mathbf{V} = (X, Y)$. De kansdichtheidsfunctie van $\mathbf{V}$ is f , waar $f(x, y) = x + y^2 + 1/6$ voor $0 \leq x, y \leq 1$ en $f(x, y) = 0$ elders.

- (a) Wat is de voorwaardelijke verwachtingswaarde van Y , gegeven dat $X = 1/6$?
- (b) Bereken $E(Y)$.
- (c) Zijn de coördinaten X en Y onafhankelijk? Geef uitleg.

3. Aan het begin van een beleggingsperiode wordt er belegd in een aandeel. Voor gemiddelde doeleinden richten wij ons op de natuurlijke logaritme van de koerswaarde van het aandeel. Zij A_n de natuurlijke logaritme van de koerswaarde aan het begin van de n de koersdag in de beleggingsperiode ($n \geq 1$).

- (a) Wij modelleren A_n als de som van n onafhankelijke standaard normale stochastische grootheden. Leg uit waarom hieruit volgt dat A_n normaal verdeeld is met verwachtingswaarde 0 en variantie n .

De beleggingsperiode wordt bepaald door dagelijks een eerlijke munt op te gooien. Bij kop, wordt de belegging meteen beëindigd; bij munt blijft de belegging nog doorgaan. De duur van de beleggingsperiode is dus N dagen, waar N geometrisch verdeeld is met parameter $1/2$.

- (b) Laat zien dat $E[A_N]$, de verwachte logwaarde van de koers aan het einde van de beleggingsperiode, gelijk is aan nul.
- (c) Laat zien dat $\text{Var}(A_N) = 2$.
- (d) Is deze beleggingsstrategie volgens jou aantrekkelijk? Motiveer je antwoord.
- (e) Laat zien dat $P(A_N \leq 1) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \Phi(1/\sqrt{n})$, waar Φ de verdelingsfunctie is van de standaard normaalverdeling.

Normering:

VRAAG	1	2	3
(a)	1 punt	3 punten	2 punten
(b)	1 punt	3 punten	1 punt
(c)	2 punten	1 punt	2 punten
(d)	1 punt		1 punt
(e)	1 punt		2 punten
(f)	2 punten		
(g)	1 punt		
(h)	3 punten		
totaal:	12 punten	7 punten	8 punten

Cijfer = 1 + Aantal punten / 3